ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 53

Републичка комисија за математичка
такмичења ученика основних школа

550 ЗАДАТАКА

СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
2007-2011. године

БЕОГРАД
2011.

Аутори: *др Војислав Андрић, Ђорђе Баралић, др Ненад Вуловић, др Драган Ђорић, Диана Зита, др Александар Илић, мр Милан Јовановић, Вера Јоцковић, Славољуб Милосављевић, Мирјана Перовановић, др Бранислав Поповић, др Ратко Тошић*

550 ЗАДАТАКА

са математичких такмичења ученика основних школа 2007–2011. године

Материјали за младе математичаре, свеска 53

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
www.dms.org.rs, E-mail: info@dms.org.rs

За издавача: *др Зоран Каделбург*

Рецензент: *др Зоран Каделбург*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

Цртежи: *др Ненад Вуловић*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016 : 51(075.2)(079.1)

ПЕТСТО педесет задатака
550 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2007–2011. године / [Војислав Андрић ... и др.] . – Београд : Друштво математичара Србије, 2011. (Крагујевац : Сквер). – [4], 169 стр. : граф. прикази, табеле ; 21 cm – (Материјали за младе математичаре / Друштво математичара Србије ; св. 53)

На врху насл. стр.: Републичка комисија за математичка такмичења ученика основних школа. – Тираж 1500.

ISBN 978–86–81453–83–4
1. Андрић, Војислав, 1952– [аутор]

COBISS.SR–ID 187809804

ISBN 978–86–81453–83–4

Тираж: 1500 примерака
Штампа: „Сквер“, Крагујевац

САДРЖАЈ

	Задаци	Решења
2007. година	1	75
2008. година	15	94
2009. година	30	114
2010. година	45	134
2011. година	61	152

ПРЕДГОВОР

После девет веома успешних и тиражних издања збирке 1000 ЗАДАТАКА СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА уредништво едиције Материјали за младе математичаре проценило је да ће једна мања збирка, која ће се брже мењати, бити атрактивнија потенцијалним читаоцима. Стога је решено да се изда ова збирка задатака која садржи све задатке (са решењима) са такмичења из математике ученика основних школа из последњих пет година – од 2007. до 2011. године, и то са свих нивоа – од школског, преко општинског, окружног, државног, Српске математичке олимпијаде, до Јуниорске балканијаде.

Београд, децембра 2011. год. *Уредништво*

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

1. Израчунај:

а) $462 + 231 =$ б) $892 - 351 =$

в) $486 + 392 - 678 =$

2. Које бројеве треба написати на црте тако да једнакост буде тачна:

$$8 \cdot \_\_\_\_ + 8 : \_\_\_\_ = 60\ ?$$

3. Мењајући место тачно једном „штапићу“ учини да једнакост постане тачна:

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} + \mathrm{VI} = \mathrm{XIV}.$$

Нађи два различита решења.

4. Користећи цифре 5 и 2 можеш да напишеш 8 троцифрених бројева (цифре се могу понављати).

а) Одреди два таква броја чији је збир 77.

б) Одреди два таква броја чија је разлика 33.

Нађи сва могућа решења.

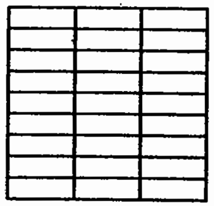
5. Софија је написала број који је за 70 већи од броја који је за 148 мањи од 600. Који број је Софија написала?

IV разред

6. Ако је $a + b = 2\,006\,000$, израчунати $a + 444\,444 + b$.

7. Брат има 20, а сестра 6 година. За колико година ће брат бити два пута старији од сестре?

8. Дужина странице квадрата је 2007 cm. Тај квадрат је паралелним дужима подељен на 27 једнаких правоугаоника, као на слици. Израчунати обим једног од тих правоугаоника.



Сл. уз зад. 8

9. У једној основној школи је 1458 ученика, а у другој 946. Колико ученика треба преместити из једне школе у другу тако да у обе школе буде исти број ученика?

10. Збир три различита четвороцифрена броја је 10 000. Ако је a највећи од та три броја, колика је највећа могућа вредност броја a?

V разред

11. Производ $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ поделити бројем 4536.

12. Разлика мера два комплементна угла је $2007'$. Одредити мере тих углова.

13. Одредити све четвороцифрене бројеве дељиве са 15 код којих је цифра десетица 5, а цифра стотина 1.

14. Дуж AB дужине 60 cm тачкама C и D подељена је на три неједнака дела. Растојање средишта крајњих делова је 45 cm. Колика је дужина дужи CD?

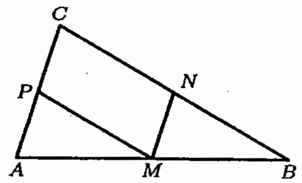
15. Скупови A и B имају исти број елемената. Ако је $A\cup B=\{x \mid x\in\mathbf{N}$ и $x<18\}$, а $A\cap B=\{1,2,7,13,17\}$, одредити скупове A и B знајући да је сваки елемент скупа $A\setminus B$ већи од сваког елемента скупа $B\setminus A$.

VI разред

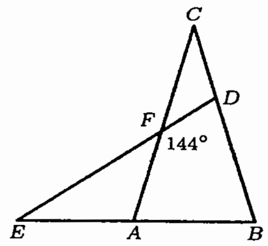
16. Израчунати вредност израза $\dfrac{9\cdot\left(-2007+\dfrac{2007}{9}\right)}{(9\cdot2007-2007):9}$.

17. Израчунати збир заједничких целобројних решења неједначина $7x-16\geqslant-58$ и $-9x+73>100$.

18. У троуглу ABC тачка M је средиште странице AB. Ако је MN паралелно са AC и MP паралелно са BC (као на слици), доказати да је $\triangle AMP\cong\triangle MBN$.



Сл. уз зад. 18



Сл. уз зад. 20

19. Упоредити бројеве a и b ако је

$$a=1-2+3-4+5-6+\cdots+2005-2006,$$
$$b=1-3+5-7+9-11+\cdots+2005-2007.$$

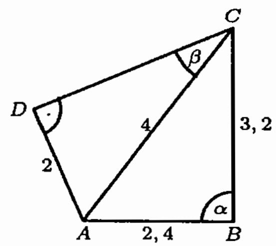
20. Израчунати углове једнакокраких троуглова ABC $(AC=BC)$ и BDE $(BE=DE)$ (видети слику).

VII разред

21. Израчунати x ако је $\frac{1}{9}\cdot3^{10}+\frac{1}{3}\cdot3^{9}-5\cdot3^{8}=x\cdot3^{8}$.

22. Поређати бројеве $-5\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$, $-3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{6}$ по величини од већег ка мањем.

23. Користећи податке са слике одредити меру угла $\alpha+\beta$.



Сл. уз зад. 23

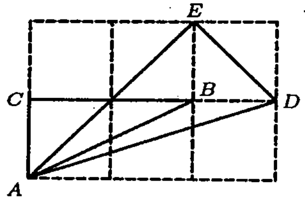
24. Упоредити бројеве 15^{15} и 45^{10}.

25. Израчунати површину једнакокраког трапеза $ABCD$ чије су дијагонале узајамно нормалне, а дужина висине је 5 cm.

VIII разред

26. Дужина правоугаоника повећана је за $p\%$, а ширина је смањена за $p\%$. Ако се површина правоугаоника смањила за 16%, одредити p.

27. У скупу реалних бројева решити неједначину
$$\frac{x}{2\cdot3}+\frac{x}{3\cdot4}+\frac{x}{4\cdot5}+\frac{x}{5\cdot6}-x\geqslant-\frac{2}{3}.$$



Сл. уз зад. 28

28. Правоугаоник се састоји од шест квадрата, као на слици. Ако је површина троугла ABC једнака $32\,\mathrm{cm}^2$, израчунати површину троугла ADE.

29. У скупу реалних бројева решити једначину $x+|x|=\dfrac{x}{|x|}$.

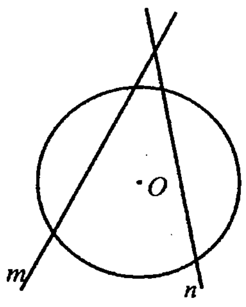
30. У простору су дате две различите паралелне праве и три различите тачке. Колико највише равни оне одређују?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

31. Израчунај:

а) $438+163$; б) $908-159$;
в) $60:5+5\cdot3$; г) $85+15:5$.



Сл. уз зад. 32

32. Нацртај на свом папиру круг са центром у тачки O и две праве m и n које се секу ван тог круга (види слику).

а) Нацртај тачку B која припада и нацртаном кругу и правој n.

б) Нацртај праву s која сече праву n у тачки B и пролази кроз центар O круга.

в) Нацртај тачке C и D у којима права s сече кружну линију (кружницу).

г) Шта представља дуж OC за дати круг?

33. Симонида је рекла: „За три године ћу имати три пута мање година од своје мајке, која сада има 27 година.“ Колико година Симонида има сада?

34. Милан је поподне гледао пренос утакмице на ТВ-у од 14 часова и 30 минута до 16 часова и 15 минута, а увече емисију о рибама од 19 часова и 15 минута до 20 часова и 10 минута.

а) Колико је трајао пренос утакмице?

б) Да ли је дуже трајао пренос утакмице или емисија о рибама и за колико?

35. Број 509 има збир цифара 14 јер је $14=5+0+9$. Нађи највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 и најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21, а затим и разлику тако добијених бројева.

IV разред

36. Између две цифре броја 664422 уписати цифру 3 тако да добијени седмоцифрени број буде:

(а) највећи могући, (б) најмањи могући.

37. Годишњи комплет Математичких листова састоји се од шест свешчица. Свешчице не морају имати исти број страница, али се зна да свака свешчица има 40 или 44 странице. Одредити може ли годишњи комплет Математичких листова имати укупно 260 страница.

38. Правоугаоник је помоћу две паралелне праве подељен на три једнака квадрата. Колико пута је обим тог правоугаоника већи од обима једног од квадрата?

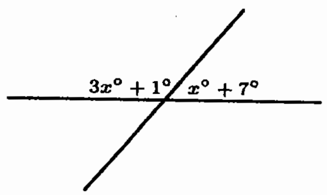
39. Љиља и Биља заједно имају 228 динара, а Маша и Таша 166. Ако Љиља има 70 динара више од Маше, ко има више динара, Биља или Таша и за колико?

40. Колико има троцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 4, а колико четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара једнак 4?

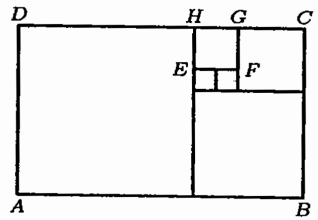
V разред

41. Цифрама 1, 4, 5 и 7 написати све троцифрене бројеве чије су све цифре међусобно различите, а дељиви су са 3.

42. Израчунати мере углова на слици.



Сл. уз зад. 42



Сл. уз зад. 44

43. У једној школи сваки ученик учи бар један од два језика, енглески и француски. Енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, а француски $\frac{3}{4}$. Који део свих ученика учи оба језика?

44. Правоугаоник $ABCD$ подељен је на шест квадрата, као на слици. Одредити површину правоугаоника $ABCD$ ако је обим квадрата $EFGH$ једнак 8 cm.

45. Поређати, од мањег ка већем, бројеве $\frac{2}{9}$, $\frac{25}{111}$ и $\frac{447}{2007}$.

VI разред

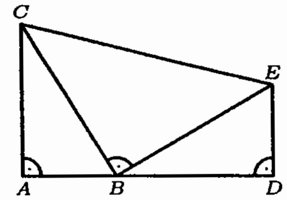
46. Одредити збир целобројних решења неједначине $|x-1| < 6$.

47. Симетрале углова BAC и ABC троугла ABC секу се под углом од 124°. Одредити меру угла ACB.

48. Аца, Бора и Веса су имали неколико кликера у кеси. Аца је пришао и додао онолико кликера колико је било у кеси и још 1 кликер. Затим је Бора пришао и додао два пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 3 кликера. Последњи је пришао Веса и додао три пута онолико кликера колико је у том тренутку било у

кеси и још 5 кликера. Ако је на крају у кеси било 149 кликера, колико кликера је било у кеси на почетку?

49. На дужи AD дата је тачка B, таква да су троуглови ABC и DEB правоугли, а троугао CBE једнакокрако правоугли, као на слици. Доказати да су троуглови ABC и DEB подударни.



Сл. уз зад. 49

50. У једној школи има 800 ученика. Доказати да бар три ученика имају рођендан истог датума.

VII разред

51. Израчунати вредност израза $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2} - (\sqrt{5}-5)$.

52. У правоуглом троуглу ABC дужине катета AC и BC су редом 30 cm и 40 cm. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а C_2 подножје хипотенузине висине, израчунати дужину дужи C_1C_2.

53. Дужине страница AB и BC правоугаоника $ABCD$ су редом 5 cm и 3 cm. Пресек праве која садржи тачке B и C и симетрале угла BAD је тачка M, а пресек праве која садржи тачке A и D и симетрале угла BCD је тачка N. Израчунати површину четвороугла $ANCM$.

54. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15, а свака цифра му је 0 или 4.

55. Одредити најмањи природан број који се може добити кад се у изразу $1*2*3*\cdots*2005*2006$ свака звездица замени са $+$ или $-$.

VIII разред

56. У једначини $3\cdot(x-4k)-2k = 3\cdot(2x-3)+1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

57. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

58. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x-2| < a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

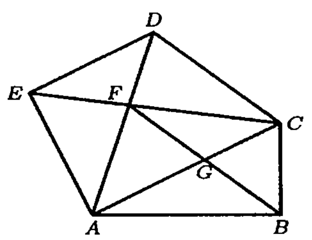
59. Коцка чија ивица је дужине 10 cm пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина 2 : 3.

60. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

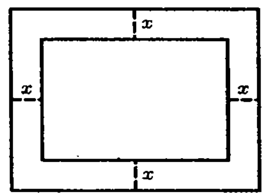
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

IV разред

61. Колико има троуглова на слици? Наведи те троуглове.



Сл. уз зад. 61



Сл. уз зад. 63

62. На колико начина Воја, Раде и Зоран могу да поделе 7 једнаких кликера, тако да сваки од њих добије бар један кликер?

63. Травњак је облика правоугаоника чија је краћа страница дужине 16 m. Око травњака је направљена стаза исте ширине на свим правцима (као на слици) чија је површина 176 m^2. Израчунати дужину друге странице правоугаоника (травњака) ако пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе пређе 16 m више него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе.

64. У шуми је укупно било 565 фазана и јаребица. Када је број фазана порастао 3 пута, а број јаребица порастао 5 пута, било их је укупно 2007. Колико је фазана, а колико јаребица било на почетку у шуми?

65. Дата је једнакост ВУК + ЛОВАЦ = БАЈКА. Иста слова заменити истом цифром, а различита слова различитим цифрама, тако да једнакост буде тачна. Познато је да слово Л треба заменити цифром 5. Детаљно образложити.

V разред

66. Одредити све природне бројеве a и b такве да је $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2} < \frac{a}{10} < \frac{3}{4}$.

67. Стена у облику коцке чија је дужина ивице 10 m исечена је на једнаке коцкице чије су дужине ивица 1 dm. Ређањем тих коцкица једне поред друге поплочана је правоугаона стаза ширине 1 m. За колико сати би ту стазу прешао пешак који сваког сата прелази 5 km?

68. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $2p + 3q + 4r = 2006$.

69. При дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n добијају се редом остаци 1 и 2, а при дељењу броја 231 бројем $n+1$ добија се остатак 3. Одредити све такве бројеве n.

70. Нацртати 6 правих и 7 тачака тако да свака од тих правих садржи тачно 3 од тих тачака.

VI разред

71. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a+b = 30$ и $\frac{2005}{2007} = \frac{198}{223} + \frac{a}{b}$.

72. Нека је $ABCD$ паралелограм код кога је $AB > BC$. Права p која садржи пресек дијагонала O и нормална је на дијагоналу BD сече страницу AB у тачки M и страницу CD у тачки N. Доказати да је четвороугао $MBND$ ромб.

73. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a > b$, доказати да је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 12.

74. У оштроуглом троуглу ABC тачке D и E су средишта страница AC и BC. Ако се симетрале углова ADE и BED секу на страници AB, доказати да је $AB = \dfrac{AC+BC}{2}$.

75. Одредити колико има једнакокраких троуглова чије странице имају целобројне дужине (у cm), а обим им је једнак 2005 cm.

VII разред

76. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > 3$.

77. У квадрат чија је дужина странице 10 cm уписан је правилни дванаестоугао, тако да свакој страници квадрата припада по једна страница дванаестоугла. Израчунати дужину странице тог дванаестоугла.

78. Упоредити бројеве $3^{2007} - 2^{3000}$ и $2007 \cdot 2^{2007}$.

79. Испитати да ли постоји троугао чије су дужине висина 1 cm, 2 cm и 3 cm.

80. Одредити колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна од тих цифра не појављује више од два пута у запису броја.

VIII разред

81. Доказати да је број $2007^{2005} - 2007$ дељив са 90.

82. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од $30°$ при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

83. Израчунати разлику израза $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2005^2$ и $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + 2004\cdot 2006$.

84. Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова ABC и ABD секу се у тачки E. Ако је дужина дужи AC једнака 6 cm, а дужина дужи BD једнака 3 cm, израчунати растојање тачке E од дужи AB.

85. Петоцифрен број је „петоразлик" ако су му све цифре различите и припадају скупу $\{1,2,3,4,5\}$. Израчунати збир свих таквих бројева.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

VI разред

86. Одредити све седмоцифрене бројеве који почињу са 7002, а деливи су и са 5 и са 7 и са 11.

87. Конструисати паралелограм $ABCD$ чија је дијагонала AC дужине 6 cm, дијагонала BD дужине 4 cm, а висина DD' дужине 3 cm.

88. На једном тестирању учествовало је 300 ученика, од којих је 10% било дечака. Сви дечаци су освојили исти број бодова, а просечан број бодова девојчица је био 83. Ако је просечан број бодова свих ученика био 84, колико бодова је освојио сваки дечак? (*Напомена.* Просечан број бодова за неколико ученика се рачуна тако што се збир бодова које су освојили ти ученици подели бројем тих ученика.)

89. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су једнакокракоправоугли са хипотенузама AB и A_1B_1, при чему $C_1 \in BC$, $B_1 \in AB$, $A_1 \in AC$. Доказати да је $AA_1 = 2\cdot CC_1$.

90. Дато је 2007 различитих простих бројева. Доказати да се бар 502 од тих бројева завршавају истом цифром.

VII разред

91. Ако за реалне бројеве a и b важи једнакост $ab = a - b$, доказати да вредност израза $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$ не зависи ни од a ни од b.

92. У правоуглом троуглу ABC са правим углом код темена C дата је тачка D таква да је дужина дужи CD једнака 5 cm. Одредити дужину хипотенузе AB ако су и површина троугла ACD и површина троугла BCD једнаке четвртини површине троугла ABC.

93. Ћирило је написао на табли низ од пет бројева тако да је разлика сваког броја (почев од другог) и његовог претходника један исти број. Онда је дошао Методије и заменио све цифре словима, и то исте цифре истим словима, а различите цифре различитим словима. Тако је добијен запис: A, BC, BD, CE, FF. Које бројеве је написао Ћирило?

94. Испитати постоји ли природан број n, такав да је збир $2^n + 3^{n+3}$ једнак квадрату неког природног броја.

95. Нека су D и E тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице AC и BC, а O центар тог круга. Ако је F пресечна тачка правих DE и AO, израчунати меру угла AFB.

VIII разред

96. Одредити најмањи реалан број A, такав да за било који реалан број x за који је $|x-2| < 0{,}04$ важи да је $|x^2 - 5| < A$.

97. Тачка D је средиште странице AC троугла ABC. Симетрала угла ADB сече страницу AB у тачки E, а симетрала угла BDC сече страницу BC у тачки F. Ако је пресек дужи BD и EF тачка M, доказати да је $EM = MF$.

98. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева облика $4^n + 15n - 1$, где је n природан број.

99. Дужине ивица квадра (у cm) су природни бројеви. Ако се површина тог квадра (у cm^2) изражава истим бројем као збир дужина свих ивица тог квадра, одредити дужине ивица тог квадра.

100. Раша и Гаша имају чоколаду квадратног облика која се састоји од $27 \cdot 27$ коцкица. На почетку је чоколада код Раше. Онај који држи чоколаду пресече је праволинијски једним потезом ножа онако како жели на два дела, али тако да не „оштети“ ниједну коцкицу. Један део поједе, а други да противнику. Губи онај играч који добије само једну коцкицу. Који од двојице играча може смислити стратегију којом побеђује независно од тога како противник игра и која је то стратегија?

ПРВА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

101. У унутрашњој области паралелограма $ABCD$ дата је тачка P таква да је $\measuredangle ADP = \measuredangle ABP$ и да је $\measuredangle DCP = 30^\circ$. Одредити меру $\measuredangle DAP$.

102. На једној прослави било је укупно 2007 особа. За сваке 1003 од тих особа постојала је бар једна особа од преосталих присутних која се познавала са сваком од те 1003 особе. Доказати да је на прослави постојала особа која се познавала са свим присутним особама.

103. За позитивне реалне бројеве x, y и z важи да је $xyz = 1$. Доказати да је

$$\frac{2}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{2}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{2}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leqslant 1.$$

104. Поља таблице димензије 3×3 попуњена су бројевима -1 и 1. У сваком кораку истовремено се у свако поље таблице упише производ свих бројева који су у пољима која са тим пољем имају заједничку ивицу. Да ли се, независно од тога који су бројеви били у пољима таблице на почетку, овим поступком може добити да у свим пољима таблице буде број 1?

105. Наћи највећи природан број k такав да постоји број облика $1! + 2! + \dots + n!$ $(n \in \mathbf{N})$ чији је делитељ број 3^k. $[m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1]$

106. Тачке D, E и F припадају редом страницама AB, BC и CA оштроуглог троугла ABC, при чему дужине дужи AE, BF и CD нису веће од $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Доказати да површина троугла ABC није већа од $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

ЈЕДАНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Шумен (Бугарска), 2007.

107. Нека је a позитиван реалан број, такав да је $a^3 = 6(a+1)$. Доказати да једначина $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ нема реалних решења.

108. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у којем је $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36°$, $\measuredangle CBD = 18°$ и $\measuredangle BAC = 72°$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки P. Одредити величину $\measuredangle APD$.

109. У равни је дато 50 тачака, од којих никоје три не припадају истој правој. Свака од тих тачака је обојена једном од четири дате боје. Доказати да постоји боја и најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена том бојом.

110. Доказати да ако је p прост број, тада $7p + 3^p - 4$ није квадрат целог броја.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

III разред

111. Израчунај вредност израза:

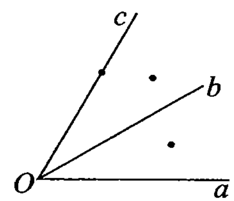
а) $363 + 435$, б) $910 - 462$, в) $62 + 8 \cdot 3$.

112. а) Нацртај дату слику на свом папиру (који ћеш предати).

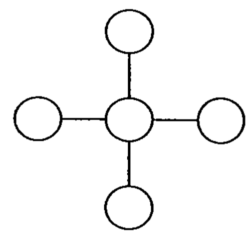
б) На нацртаној слици обележи тачке A, B и C тако да се:

– тачка B налази на полуправој Oc;

– тачка A налази у углу aOc и није у углу bOc.



Сл. уз зад. 112


Сл. уз зад. 114

113. Марко је замислио један број који када умањиш за 348 добијаш 485. Који број је Марко замислио?

114. У сваки кружић на слици треба уписати један од бројева 1, 2, 3, 4 и 5 тако да збир бројева у водоравном правцу и збир бројева у усправном правцу буде по 8.

115. Бројеве 7, 24 и 336 можеш помоћу четири цифре 3 и неких рачунских операција записати на следећи начин:

$$7 = 3 + 3 + 3 : 3, \qquad 24 = 33 - 3 \cdot 3, \qquad 336 = 333 + 3$$

а) Користећи четири цифре 3 на сличан начин напиши број 39.

б) Који је највећи број треће стотине који можеш да напишеш помоћу четири цифре 3 на сличан начин?

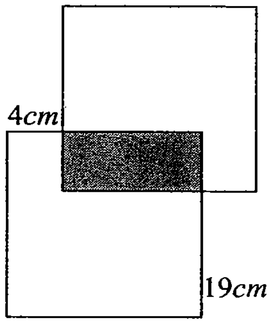
IV разред

116. Израчунај вредност израза:

а) $8002 - 2008$, б) $715 + 285 \cdot 3$.

117. Нађи збир највећег парног петоцифреног броја записаног цифрама 1, 2, 3, 4 и 5 (цифре се не могу понављати) и највећег четвороцифреног непарног броја записаног цифрама 6, 7, 8 и 9 (цифре се не могу понављати).

118. Два квадрата дужина страница по 28 cm имају заједнички осенчени део, облика правоугаоника, као на слици. Израчунај обим правоугаоника.



Сл. уз зад. 118

119. Који је непаран број већи од 501 и мањи од 599, а дељив је и са 5 и са 9?

120. Ана је рекла: „Замислила сам један четвороцифрен и један троцифрен број, чија је разлика 9 863 и који имају највећи могући збир“. Које је бројеве Ана замислила и који је тај највећи могући збир?

V разред

121. Одреди највећи заједнички делилац најмањег и највећег непарног четвороцифреног броја.

122. Углови α и β су комплементни. Одреди углове α и β, ако је њихова разлика једнака трећини већег угла.

123. У једној школи последњег наставног дана 17 наставника је радило у преподневној смени, 20 у поподневној, а 5 у обе смене. Тог дана су 3 наставника била на боловању. Колико наставника ради у тој школи?

124. Испод сваке колоне уписан је збир бројева из те колоне, а поред сваке врсте производ бројева из те врсте (види табелу лево). На исти начин попуни табелу десно.

2	3	2	12
4	2	1	8
3	6	2	36
9	11	5	

			4
			15
			18
8	9	5	

Сл. уз зад. 124

125. Бака Мица направи 25 медењака од 1 шоље меда, 2 шоље уља, 3 шоље шећера и 4 шоље брашна. Колико највише медењака бака Мица може да направи ако у кући има 13 шоља меда, 14 шоља уља, 15 шоља шећера и 16 шоља брашна?

VI разред

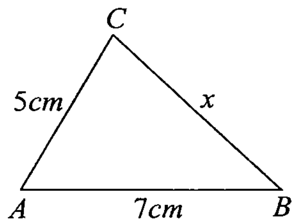
126. Израчунај вредност израза

$$2000x - 2001x + 2002x - 2003x + 2004x - 2005x + 2006x - 2007x$$

ако је x негативно решење једначине $|x| = 2008$.

127. У троуглу ABC угао $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Симетрале углова α и β секу се под углом $124°$. Одреди $\measuredangle ACB = \gamma$.

128. Ако су странице троугла 5, 7 и x (у cm), гледај слику и одреди могуће природне бројеве x. За сваку вредност x упореди одговарајуће углове.



Сл. уз зад. 128

129. Нађи разломак са имениоцем 4 мањи од $-\frac{5}{23}$, а већи од $-\frac{6}{23}$.

130. Нацртај правоугаоник $ABCD$ ($AB = 3\,\mathrm{cm}$, $BC = 5\,\mathrm{cm}$). Одреди тачке M, N, P, Q које су редом средишта страница AB, BC, CD, DA. На изломљеној линији $MNQP$ конструиши тачке које су једнако удаљене од темена A и C.

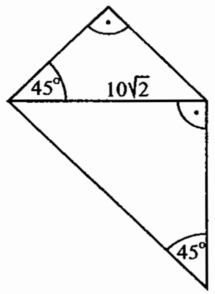
VII разред

131. Израчунај вредност израза $8x^3 - 4x^2$ за $x = \sqrt{2 + \frac{1}{4}}$.

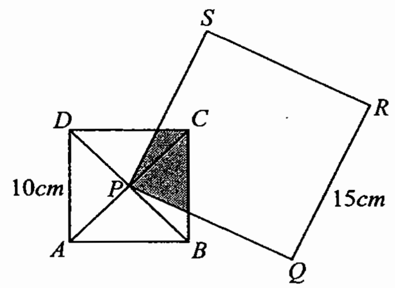
132. Ако многоугао има $\frac{5}{2}$ пута више дијагонала него страница, израчунај збир свих његових унутрашњих углова.

133. Одредити x ако је $\frac{2008^{2007} + 2008^{2008}}{2009} = 2008^x$.

134. Израчунај обим и површину четвороугла са слике.



Сл. уз зад. 134



Сл. уз зад. 140

135. Одредити целе бројеве a и b ако је $a\sqrt{3} + b = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + 3$.

VIII разред

136. Одредити вредност променљиве k тако да једначине

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad x \cdot (1 - k) + 1{,}5 = k \cdot (1 - x)$$

буду еквивалентне.

137. Површина основе правилне четворостране призме је B, а површина једне бочне стране је $2B$. Изрази површину и запремину призме у функцији од површине основе B.

138. Реши неједначину $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} < 1 - \frac{y+6}{3}$.

139. Колико је највише равни одређено са 3 тачке и 3 паралелне праве?

140. Ако је теме квадрата $PQRS$ у пресеку дијагонала квадрата $ABCD$, израчунај површину осенченог дела.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

III разред

141. Израчунај:

а) $52 - 10 + 12$, б) $7 \cdot 8 + 124$, в) $12 + 8 \cdot 5$, г) $20 - 8 : 4$.

142. Ана је требало да помножи неки број са 7. Уместо да помножи са 7, она је тај број сабрала са 7 и добила резултат 20. Који резултат би Ана добила да није погрешила?

143. Коста, Јова и Влада су засадили крушку, јабуку и вишњу. Сваки је засадио по једно дрво чији назив не почиње истим словом као његово име. Ко је засадио које дрво, ако се зна да Влада није засадио крушку?

144. На слици су приказана два круга K_1 и K_2 и њима одговарајуће кружнице k_1 и k_2 и дуж AB тако да је тачка A на кружници k_1 и ван круга K_2, а тачка B у кругу K_2 и ван круга K_1.

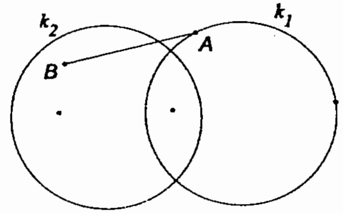
а) Нацртај ову слику на папиру који ћеш предати.

б) Обележи три назначене тачке словима C, D и E, тако да:

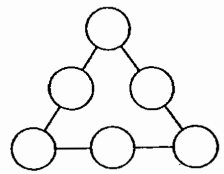
– C припада кружној линији k_1 и не припада кругу K_2;

– D припада кругу K_2 и не припада кругу K_1;

– E припада и кругу K_1 и припада кругу K_2.



Сл. уз зад. 144



Сл. уз зад. 145

145. Упиши бројеве 14, 15, 16, 17, 18 и 19 у кругове на слици, али тако да збирови на свакој од страница замишљеног троугла буду међусобно једнаки.

IV разред

146. Између неких цифара у низу

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

уметни знаке основних рачунских операција тако да бројевна вредност добијеног израза буде 2 008.

147. Дато је 6 картона облика правоугаоника дужине 3 cm и ширине 2 cm. Користећи све дате картоне састави један правоугаоник који има:

а) највећи могући обим, б) најмањи могући обим.

148. Једна девојчица ће у 2008. години напунити онолико година колики је збир цифара њене године рођења. Које године 21. века је рођена та девојчица?

149. У једној игри са друговима, Марко је купио 100 бомбона по цени 5 бомбона за 2 динара, а затим их све продао по цени 2 бомбоне за 1 динар. Колико динара је Марко зарадио у игри?

150. У три корпе има 12, 14 и 22 јабуке. Дозвољено је јабуке пребацивати из једне у другу корпу али само тако да из једне корпе пребациш у другу тачно онолико јабука колико у другој већ има. Покажи како са три пребацивања можеш да постигнеш то да у свакој корпи буде једнак број јабука.

V разред

151. Којом цифром се завршава производ $9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9$ (девет деветки)?

152. На правој су дате тачке A, B, C и D, тим редом. Тачке M и N су средишта дужи AB и BC. Израчунај дужину дужи CD ако је $AD = 32\,\mathrm{cm}$, а дужина дужи $MN = 1{,}5\,\mathrm{dm}$.

153. Два пужа A и B се „тркају“ на стази дугачкој 1 m. Пуж A прелази 2 dm за 2 минута, а после свака 2 минута ходања, мора 1,5 минута да

се одмара. Пуж B прелази 2 dm за 3 минута, а одмара се 0,5 минута после сваких пређених 2 dm. Који пуж ће први стићи на циљ?

154. У једној улици куће су нумерисане тако да су са једне стране куће са парним бројевима, а са друге стране са непарним. Са непарне стране бројеви иду од 1 до 169, а са парне од 2 до 114. Колико је цифара (знакова) употребљено за нумерацију свих кућа у тој улици?

155. Углови α и β су суплементни, а $\frac{2}{5}\alpha$ и β комплементни. Израчунај разлику углова α и β.

VI разред

156. Ако је

$$x = (-5) - (-3) + 5 + (-5) \quad \text{и} \quad y = -5 - x,$$

израчунај колико је $|x-1| - |y-2|$.

157. Милован је требало да подели неки број са 9. Уместо да подели са 9 он је од тог броја одузео 9 и добио резултат -603. Који резултат би Милован добио да није погрешио?

158. У троуглу ABC, $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 20^\circ$ и $AB - BC = 10\,\mathrm{cm}$. Ако симетрала угла $\measuredangle ACB$ сече праву AB у тачки M, одреди дужину CM.

159. За углове троугла ABC важи: $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle ABC = 2\cdot\measuredangle CAB$. Катета BC је 8 cm. Тачка M је средиште хипотенузе AB, тачка N је средиште катете AC и тачка P средиште дужи AM. Израчунај дужину изломљене линије $BCMNPA$.

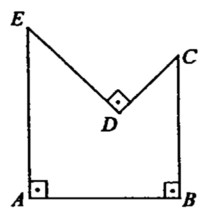
160. За природне бројеве a, b и c важи да су већи од 1 и да је бар један од њих паран. Ако је $a + 1 = 2b + 2 = 3c + 3$, наћи најмању вредност производа $a \cdot b \cdot c$.

VII разред

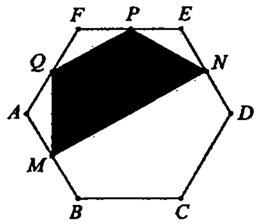
161. Ако је $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, израчунај

$$(x-y)^3 - (x-y^3) + (-x\cdot y^3) - (-x\cdot y)^3.$$

162. Наћи обим многоугла на слици ако је $AE = 13\,\mathrm{cm}$, $BC = 7\,\mathrm{cm}$, $ED = 8\,\mathrm{cm}$ и $CD = 6\,\mathrm{cm}$ и ако је $\measuredangle EAB = \measuredangle ABC = \measuredangle CDE = 90°$.



Сл. уз зад. 162



Сл. уз зад. 164

163. Ако је $\sqrt{2}\cdot x - \sqrt{2}\cdot y = \sqrt{18}$, израчунај вредност израза $\dfrac{\sqrt{3}\cdot x}{3} - \dfrac{y}{\sqrt{3}}$.

164. Одреди однос површина правилног шестоугла $ABCDEF$ и четвороугла $MNPQ$ на слици ако су M, N, P, Q средишта страница AB, DE, EF, FA.

165. Наћи просте троцифрене бројеве чији је производ цифара 252.

VIII разред

166. Колико има целих бројева x за које важи $\dfrac{1}{4} < \dfrac{2-x}{7} < \dfrac{11}{12}$?

167. Однос површина страна једног квадра је $2:3:5$. Израчунај однос дужина ивица тог квадра.

168. Одреди x ако је $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

169. Краци трапеза припадају правим које су међусобно нормалне. Докажи да је збир квадрата дужина дијагонала тога трапеза једнак збиру квадрата дужина основица.

170. Дат је скуп $S = \{8, 5, 1, 13, 3, 21, 2\}$. Милена за сваки двочлани подскуп скупа S на табли записује већи број. Одреди збир бројева које је Милена написала на табли.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

IV разред

171. Три пријатеља, Милош, Урош и Јанош, поклонили су 12 502 књиге школи. Милош је поклонио 4 260 књига, а Урош 456 књига више од Милоша. Колико књига је поклонио Јанош?

172. На травнатом терену квадратног облика дужине 200 метара, направљен је базен облика правоугаоника, димензија 30 m и 15 m. Око базена је бетонска стаза ширине 1 метар (која са базеном има облик већег правоугаоника). Колико ари травњака има око базена?

173. Дешифруј сабирање, ако истим словима одговарају исте, а различитим словима различите цифре.

$$\begin{array}{r} A\\ BA\\ CBA\\ +\;DCBA\\ \hline 2008 \end{array}$$

174. Површина правоугаоника је $2\ 008\,\mathrm{cm}^2$. Дужина једне странице је паран број центиметара, а друге непаран број центиметара. Израчунати обим правоугаоника. Наћи сва решења.

175. У згради са 4 улаза (I, II, III и IV) и 4 спрата на сваком спрату је по један стан у сваком улазу. У сваком од станова у непарним улазима живи по једнак број станара. У сваком од станова у парним улазима живи дупло више станара него у сваком од станова у непарним улазима. Ако у згради укупно живи 48 станара и на сваком спрату по једнак број станара, колико станара живи у сваком стану?

V разред

176. Ако је $a = 2,5$ и $b = 10$, израчунај вредност израза $1 : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

177. Дате су две различите кружнице и три различите праве. За тачку кажемо да је „симпатична“ ако је заједничка за два од датих пет геометријских објеката. Колико највише „симпатичних“ тачака могу имати дате кружнице и праве?

178. Скуп M чине прости чиниоци броја 2 310. Колико бројева постоји који су једнаки производу тачно два елемента из скупа M.

179. Страница квадрата је 6 cm. Једном правом је подељен на 2 правоугаоника чији се обими разликују за 5 cm. Израчунај површине тих правоугаоника.

180. Златар Златко је за $\frac{1}{2}$ kg сребра и $\frac{1}{3}$ kg злата платио 750 000 динара, а за 1 kg сребра и $\frac{1}{2}$ kg злата платио је 1 250 000 динара. Колико ће Златко платити 1 kg сребра и 2 kg злата?

VI разред

181. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, израчунај вредност израза $\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b} + 90a - 4{,}5b$.

182. Одреди цифре a и b $(a \neq b)$ тако да број $0{,}\overline{abab\ldots}$ буде једнак нескративом разломку за који је збир имениоца и бројиоца једнак 17.

183. Конструиши троугао ABC ако је познато $a + c = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$.

184. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да је $p\cdot(264q+4r) = 2008$.

185. Страница ромба $ABCD$ је 12 cm, а $\measuredangle BAD = 60°$. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом. Праве AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN.

VII разред

186. Израчунај вредност израза $\sqrt{\left(\sqrt{2008} - 45\right)^2} + \sqrt{\left(44 - \sqrt{2008}\right)^2}$.

187. У правоуглом троуглу ABC, дужине тежишних дужи које одговарају катетама су $2\sqrt{13}$ cm и $\sqrt{73}$ cm. Колика је дужина хипотенузе тог троугла.

188. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, чија је страница $a = 8\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину троугла $A_1A_2A_5$.

189. Да ли је вредност израза

$$1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

дељива са 2008?

190. Природан број зовемо „симпатичним“ ако је производ његових цифара паран. Колико има „симпатичних“ шестоцифрених бројева?

VIII разред

191. Одреди решења једначине $|x - |x - |x||| = 2008$.

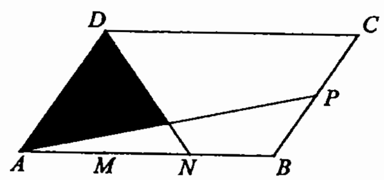
192. Теме A троугла ABC је нула линеарне функције $y = \frac{3}{4}x + 12$, а теме B је нула линеарне функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Теме C је заједничка тачка графика тих линеарних функција.

а) Докажи да је троугао ABC правоугли.

б) Израчунај обим и површину троугла ABC.

193. Од папира облика квадрата површине $50\,\mathrm{cm}^2$ изрезана је мрежа правилне четворостране пирамиде тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде (темена квадрата су врхови једнакокраких троуглова мреже те пирамиде). За ту пирамиду се зна да је ивица основе два пута мања од висине бочне стране. Колико процената површине квадрата чини површина мреже?

194. Велика коцка је састављена од малих коцки једнаких ивица, али које су обојене црвеном, плавом или белом бојом. Од укупног броја, $\frac{13}{72}$ коцки је црвене боје, а $\frac{25}{48}$ је беле боје. Број плавих коцки је мањи од 1000. Колико има плавих коцки, а колико укупно малих коцки?



Сл. уз зад. 195

195. Тачке M и N деле страницу AB паралелограма $ABCD$ на три једнака дела. Тачка P је средиште странице BC. Који део површине паралелограма чини осенчени део?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

VI разред

196. Збир година рођења Марка, Маркове сестре и Маркове мајке је 5923. Ако је 2000-те године Марко напунио два пута више година него његова сестра, а два пута мање година него његова мајка, колико година је Марко напунио 2008. године?

197. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ се секу у тачки O. Тачка M је на правој AB, при чему је $\measuredangle AMO = \measuredangle MAD$. Докажи да је $MC = MD$.

198. Дати су природни бројеви од 1 до 2008. Докажи да међу њима има мање од 604 проста броја.

199. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје хипотенузине висине, а тачке E и F су средишта катета AC и BC. Докажи да тачке C, D, E и F припадају истој кружници.

200. Дато је пет бројева: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$. Шести број је једнак производу првог и другог броја, седми број је једнак производу другог и трећег броја, а осми број је једнак производу трећег и четвртог броја. Сваки следећи број је једнак производу бројева који су за четири и за пет места испред њега. Који број је на 2008. месту? Израчунај збир првих 2008 бројева.

VII разред

201. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^4 + y^{2008} = 2x^2$.

202. Дате су две паралелне тетиве једне кружнице. Дужине тих тетива су 12 cm и 8 cm. Ако је разлика растојања ових тетива од центра кружнице 2 cm, израчунај дужину тетиве која је једнако удаљена од њих.

203. Са $f(n)$ означимо број колико пута је потребно да се притисне типка „корен“ на калкулатору тако да од броја n добијемо број мањи од 2. На пример, $f(2) = 1$, $f(5) = 2$. За колико природних бројева n $(1 < n \leqslant 2008)$ је број $f(n)$ паран?

204. Дат је правоугли трапез $ABCD$, при чему је $AB = 6$ и $CD = DA = 4$, а $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$. Разрежи дати трапез на три дела и од њих састави квадрат.

205. Колико има 2008-цифрених бројева у чијем се запису не појављује цифра 3, а који су дељиви са 3?

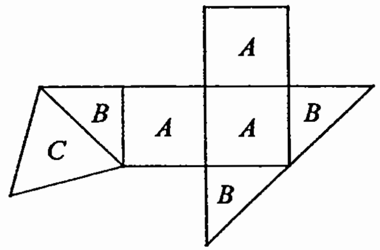
VIII разред

206. У правоугаонику $ABCD$, тачка M је средиште странице CD, а N пресечна тачка дужи AM и BD. Израчунај површину правоугаоника $ABCD$ ако је $ND = 3\,\mathrm{cm}$ и $AN = 4\,\mathrm{cm}$.

207. Одреди све целе бројеве a, b и c за које је $|a - b| + c = 19$ и $ab - |c| = -97$.

208. Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је $x^5 - y^5 - 5x^3 + 4x + y = 2008$?

209. Мрежа тела (види слику) састављена је од 3 квадрата странице a (означена са A), 3 једнакокрака правоугла троугла (означена са B) и једног једнакостраничног троугла (означен са C). Изрази запремину тог тела у функцији странице a.



Сл. уз зад. 209

210. Квадрат је помоћу 8 правих, од којих су 4 паралелне са једним паром, а 4 паралелне са другим паром страница квадрата, подељен на 25 правоугаоника. Докажи да ако међу добијених 25 правоугаоника има тачно 4 квадрата, онда су бар два од тих квадрата подударна.

ДРУГА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

211. У троуглу ABC је $\measuredangle A = 120°$, $AB = 3$ и $AC = 6$. Симетрала угла A сече страницу BC у тачки D. Одреди дужину дужи AD.

212. Одреди најмањи збир цифара броја облика $3n^2+n+1$ за $n \in \mathbf{N}$.

213. Из квадрата 100×100 исечена су четири поља која образују квадрат 2×2.

а) Доказати да се преостали део не може поплочати правоугаоницима 1×3 (сваки правоугаоник прекрива три поља) ако је квадрат 2×2 исечен у једном углу квадрата 100×100.

б) Доказати да је поплочавање могуће ако је квадрат 2×2 исечен из центра квадрата 100×100.

214. Одреди све уређене четворке (x, y, z, t) природних бројева x, y, z и t тако да је

$$x+y=zt, \qquad z+t=xy.$$

215. Бројеве $1, 2, \ldots, 2008$ распоредимо на 1004 домине, тако да се на свакој домини налазе тачно два броја. Ако производе бројева на доминама означимо са $p_1, p_2, \ldots, p_{1004}$, доказати неједнакост

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}} \leqslant \frac{1}{1\,005}+\frac{1}{1006}+\cdots+\frac{1}{2008}.$$

216. У троуглу ABC страница BC је најмања. На страницама AB и AC дате су редом тачке D и E такве да је $BD=CE=BC$. Доказати да је полупречник круга описаног око троугла ADE једнак растојању између центра круга описаног око троугла ABC и центра круга уписаног у троугао ABC.

ДВАНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Валона (Албанија), 2008.

217. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи $a+b+c+d=20$ и $ab+ac+ad+bc+bd+cd=150$.

218. Темена A и B једнакостраничног троугла ABC припадају кружници k полупречника 1, а теме C припада унутрашњости круга k. Тачка $D \neq B$ кружнице k таква је да је $AD=AB$, а E је тачка (различита од D) у којој права DC сече k. Наћи дужину дужи CE.

219. Наћи све просте бројеве p, q и r за које важи $\dfrac{p}{q}-\dfrac{4}{r+1}=1$.

220. Свако поље табле 4×4 обојено је белом бојом. У једном потезу дозвољено је променити боју произвољном пољу заједно са његовим суседним пољима у супротну (белу у црну, односно црну у белу). (Два поља су суседна ако имају заједничку страницу.) Одредити све вредности броја n, такве да је могуће после n потеза добити таблу са свим пољима обојеним у црно.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

III разред

221. Израчунај вредност израза:

(а) $468 + 389$; (б) $902 - 209$; (в) $40 - 15 : 5$.

222. У квадрате између бројева упиши тачно један од знакова $+$, или $=$ (сва три знака морају бити употребљена) тако да добијеш тачну једнакост:

а) $7\square 2\square 39\square 30$; б) $30\square 40\square 70\square 0$.

Пронађи сва решења.

223. Гордана има 85 салвета. Мирјана има 5 пута мање салвета од Гордане, а Славица за 5 салвета више од Мирјане. Колико салвета има Славица?

224. Дата је дуж $AD = 20\,\mathrm{cm}$. Између тачака A и D је тачка B, таква да је $BD = 16\,\mathrm{cm}$ и тачка C између B и D таква да је $AC = 15\,\mathrm{cm}$. Израчунај дужину дужи BC.

225. Ненад и његов син су пре две године заједно имали 40 година. Колико година ће они имати заједно за 3 године?

IV разред

226. Напиши најмањи и највећи паран седмоцифрени број користећи неке од цифара 3, 5, 0, 8 и 7 у коме се ниједна од цифара не појављује више од два пута.

227. Који је број 5 пута мањи од разлике бројева 46238 и 9393?

228. Доврши уписивање бројева у празна поља тако да збирови свака три узастопна броја буду међусобно једнаки.

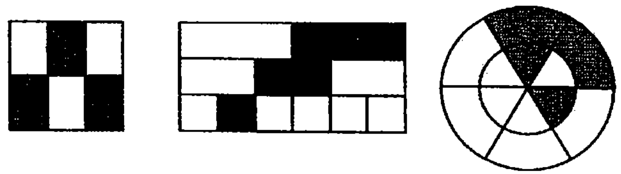
	528				1477	2306		

229. Колико се пута употреби цифра 4 за исписивање свих троцифрених бројева?

230. Обим правоугаоника, чије су странице a и b, износи $2\,\mathrm{m}$. Ако се странице дужине a смање за по $10\,\mathrm{cm}$, а странице дужине b повећају за по $10\,\mathrm{cm}$, добија се квадрат. Израчунај странице тог правоугаоника и добијеног квадрата.

V разред

231. Којим геометријским фигурама је осенчена тачно трећина? (Квадрат је подељен на једнаке делове; слојеви правоугаоника су исте ширине а сваки слој садржи једнаке делове; сваки круг је подељен на једнаке делове).



Сл. уз зад. 231

232. Одреди најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите и који је дељив и са 3 и са 4.

233. Одреди елементе скупова A и B ако је $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{\, x \mid x \in \mathbf{N}$ и $3 \leqslant x < 6 \,\}$ и $A \setminus B = \{1, 6\}$.

234. Угао α је за 32° већи од своје трећине. Одреди угао комплементан углу α.

235. Попуни табелу бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да производ бројева у сваком реду буде једнак броју са десне стране реда, а производ бројева у колони буде једнак броју испод колоне.

			20
			108
			168
42	80	108	

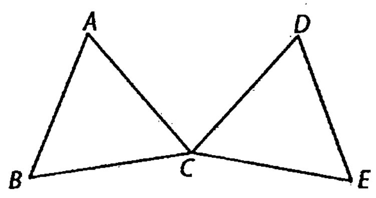
Сл. уз зад. 235

VI разред

236. Ако је $x = (-5) - (-3) + 5 + (-5)$ и $y = -5 - x$, израчунај колико је $|x-1| - |y-2|$.

237. Израчунај $|(-2009 : 49 + 2009 : 41 - 2009 : 7) : 9|$

238. Троуглови на слици су једнакостранични и подударни, и имају једно заједничко теме, тачку C. Израчунај $\measuredangle ABD$ ако је $\measuredangle ACD = 70°$.



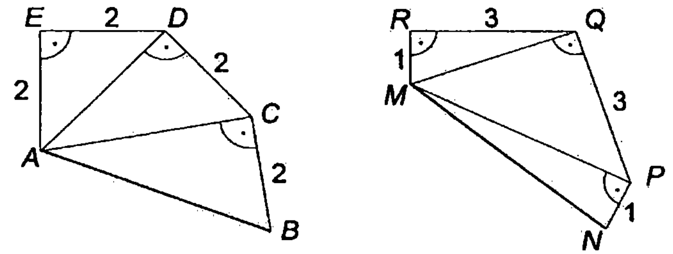
Сл. уз зад. 238

239. Весна је записала 2009 целих бројева, таквих да је сваки следећи за 2 већи од претходног. Ако је највећи међу њима 2008, одреди збир свих ових бројева.

240. Срећко је запослен у сервису „Аладин“ и за 8 сати треба да очисти $80\,\mathrm{m}^2$ тепиха. За 6 сати је очистио 3 тепиха димензија $3\,\mathrm{m} \times 2{,}5\,\mathrm{m}$, тепих стазу ширине $1{,}4\,\mathrm{m}$ и дужине $12\,\mathrm{m}$ и 2 тепиха димензија $3{,}5\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$. Колико још m^2 тепиха треба да очисти до краја радног времена?

VII разред

241. Израчунај дужине дужи AB и MN, па их упореди.



Сл. уз зад. 241

242. Одреди последњу цифру у броју 2008^{2009}.

243. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC дели средњу линију трапеза на одсечке од 2 cm и 5 cm. Ако је висина трапеза 3 cm, одреди однос површина троугла ABC и троугла ACD.

244. За колико се разликују вредности корена:

а) $\sqrt{3+\frac{1}{16}}$ и $\sqrt{2-\frac{7}{16}}$; б) $\sqrt{1{,}69-0{,}25}$ и $\sqrt{6{,}25-5{,}76}$?

245. Славина A пуни базен за 12 часова, а славина B за 15 часова. Одводна цев C празни базен за 10 часова. За које време ће се напунити базен ако су истовремено отворене славине A и B и одводна цев C?

VIII разред

246. Колико највише равни одређују три паралелне праве и 5 различитих тачака од којих су три колинеарне?

247. Ако са d_n означимо број дијагонала из једног темена конвексног многоугла, а са D_n укупан број дијагонала тог многоугла, одреди многоугао за који важи $9d_n^2 - D_n^2 = 0$.

248. Реши неједначину $2x + 1 \geqslant 2 - \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$ и решење представи на бројевној правој.

249. У равни α се налази правоугли троугао ABC са катетама 3 cm и 4 cm. У средишту C_1 хипотенузе AB је постављена дуж C_1M нормална на раван α. Тачка M је од α удаљена 5 cm. Колика је дужина дужи MC?

250. Одреди најмањи природан број који се записује само цифрама 2 и 9, а коме је збир цифара 2009.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

III разред

251. а) У назначена поља $13\square + 62\square = 753$ упиши цифре тако да једнакост буде тачна. Два решења су $130+623 = 753$ и $133+620 = 753$. Нађи још два решења.

б) У назначена поља $4\square 2 - 3\square 9 = 163$ упиши одговарајуће цифре тако да добијеш тачну једнакост. Нађи сва решења.

252. Између цифара (на левој страни једнакости)

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad = 100$$

упиши знаке рачунских операција и заграда тако да једнакост буде тачна. Нађи бар два решења.

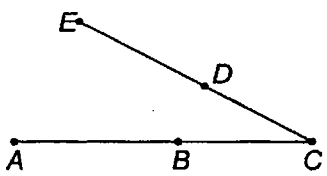
$$\begin{array}{r} A \\ AA \\ + \; AAA \\ \hline 8\,6\,1 \end{array}$$

253. Уместо слова A (горе десно) стави одговарајућу цифру тако да добијеш тачно сабирање.

254. Колико различитих

а) правих, б) дужи

одређују тачке A, B, C, D и E које имају положај као на слици?



Сл. уз зад. 254

255. Један часовник заостаје (касни) 6 секунди за 5 дана. Које време ће показивати 7. марта 2009. године у подне ако је дотеран да показује тачно време првог јануара у подне?

IV разред

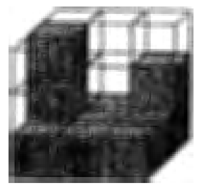
256. Израчунај $209 \cdot 208 - 208 \cdot 207 - 2 \cdot 207$.

257. Од цифара 1, 2, 3 и 4 можеш да напишеш 24 четвороцифрена броја, а да се свака од тих цифара у сваком од бројева јавља тачно једанпут. Одреди два таква броја чији је збир 7733. Колико има решења?

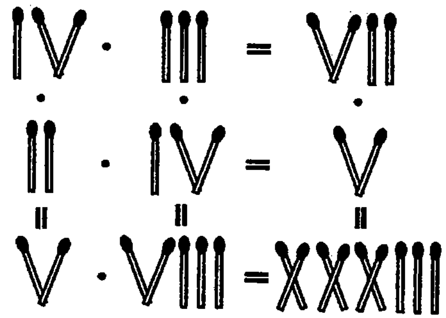
258. Правоугаоник је помоћу 3 праве подељен на 6 једнаких квадрата. Ако је обим правоугаоника 120 cm, колики је обим једног од тих квадрата?

259. Велика коцка је састављена од 27 малих жутих коцки и обојена је споља зеленом бојом (слика). Када се боја осушила, Јеротије је раздвојио све мале коцке. Колико ће малих коцки имати:

а) 3 жуте и 3 зелене стране; б) 4 жуте и 2 зелене стране;
в) 5 жутих и 1 зелену страну; г) све стране жуте боје?



Сл. уз зад. 259



Сл. уз зад. 260

260. У сваком хоризонталном реду (врсти) на слици премести једно палидрвце тако да добијеш шест тачних једнакости.

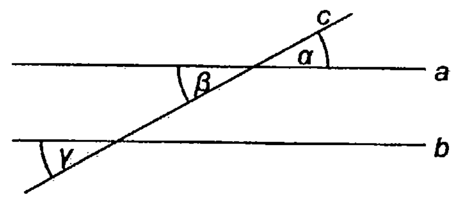
V разред

261. Колико има парова природних бројева n и $2n+1$ таквих да су оба броја (и n и $2n+1$) проста и мања од 100?

262. Пеца поједе целу пицу за 15 минута, а Пеца и Неца заједно поједу целу пицу за 6 минута. Колико је времена потребно Неци да сам поједе целу пицу?

263. Производ неколико простих бројева је 2009. Израчунај збир тих простих бројева.

264. Права c сече две паралелне праве a и b (слика). Ако је $\alpha + \beta + \gamma = 2009'$, израчунај α.



Сл. уз зад. 264

265. Деда је 2 пута јачи од бабе, баба је 3 пута јача од унуке, унука је 4 пута јача од Жуће, Жућа је 5 пута јачи од мачке, мачка је 6 пута јача од миша. Деда, баба, унука, Жућа, мачка и миш могу заједно да ишчупају репу, а деда, баба, унука, Жућа и мачка (без миша) не могу. Колико мишева треба позвати да би они сами могли да ишчупају репу?

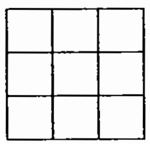
VI разред

266. Одреди три рационална броја која су мања од $-\frac{5}{12}$ и већа од $-\frac{1}{2}$ а којима су именилац и бројилац узајамно прости бројеви.

267. У троуглу ABC $(AB > BC)$ кроз тачке A и C конструисане су праве које су нормалне на симетралу угла ABC. Оне секу праве BC и AB, редом, у тачкама K и M. Израчунај дужину странице AB ако је $KC = 5\,\text{cm}$ и $MB = 8\,\text{cm}$.

268. Колико има природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара 42?

269. Дат је троугао чије су дужине страница цели бројеви (у центиметрима). Колики је најмањи, а колики највећи могући обим овог троугла ако је једна страница дужине 2009 cm, а друга 2008 cm?



270. Да ли се у квадрат 3×3 (слика) могу уписати бројеви из скупа $\{-1, 0, 1\}$ тако да збирови бројева по колонама, врстама и дијагоналама буду различити (свака два)?

VII разред

271. Докажи да вредност израза $\dfrac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}$ не зависи од n.

272. Упрости израз $\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{3}$ ако је $x = 2 - \sqrt{3}$.

273. У једнакостранични троугао странице 6 cm, уписан је круг, а у круг је уписан квадрат. Израчунај површину тог квадрата. Који део површине троугла заузима површина квадрата?

274. За четвороугао $ABCD$ је познато да је $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$, $CD = \sqrt{2}\,\text{cm}$, $\measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\measuredangle BCD = 90^\circ$. Израчунај обим и површину тог четвороугла.

275. На фудбалској утакмици у једном реду седишта на трибинама сео је известан број гледалаца. Затим је између свака два гледаоца сео још по један гледалац. Овакав начин заузимања места (седишта) поновио се укупно три пута (још 2 пута), па је после тога у том реду било 2009 гледалаца. Колико је гледалаца на почетку село у овај ред?

VIII разред

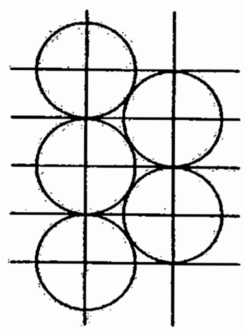
276. Реши једначину $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = 2009$.

277. Три рационална броја a, b и c су таква да је један већи од нуле, један једнак нули и један мањи од нуле. Ако за те бројеве важи

$$\frac{a(c-b)}{b} > 0,$$

који од тих бројева је већи, који мањи, а који једнак нули?

278. Колико је растојање (слика) између суседних правих (водоравних односно усправних) ако су пречници свих кругова по 10 cm?



Сл. уз зад. 278

279. Докажи да је број $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ дељив са 900 за сваки природан број n.

280. Основна ивица правилне шестостране призме повећана је за 200%, а висина је смањена за $p\%$. Ако се запремина те призме повећала за $p\%$, одреди да ли се површина омотача повећала или смањила и за колико процената.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

IV разред

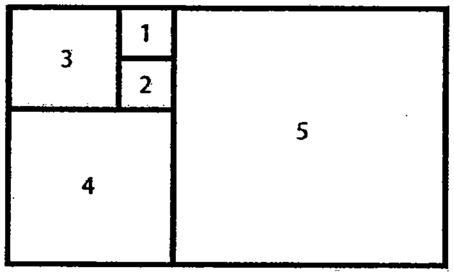
281. Допиши један пар заграда тако да буде тачна једнакост $6027 \cdot 287 - 2009 : 7 = 0$.

282. Дешифруј сабирање ако се оба сабирка читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример, 373, 4224, 5555).

$$\begin{array}{r} * * * \\ + * * * * \\ \hline 2\,0\,9\,1 \end{array}$$

283. Маја је у башти на цвећу видела бубамаре са 4 и са 7 тачкица. Колико је најмање бубамара са 7 тачкица могло да буде ако је Маја избројала укупно 90 тачкица?

284. На слици су бројевима од 1 до 5 означени квадрати који формирају правоугаоник. Израчунај обим правоугаоника ако је површина најмањег квадрата $4\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 284

285. Две ивице квадра су дужина 5 cm и 10 cm. Збир дужина свих ивица квадра је 140 cm. Израчунај површину тог квадра.

V разред

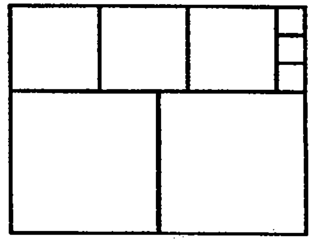
286. Дешифруј одузимање ако се умањеник и умањилац читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример, 989, 3883, 9999).

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - \;\; * * * \\ \hline 2\,0\,9\,1 \end{array}$$

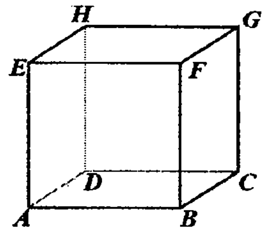
287. Уместо звездица стави знаке рачунских операција тако да добијеш тачну једнакост (можеш користити и заграде):

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6027} = 2009.$$

288. Правоугаоник је подељен на 8 квадрата (слика). Израчунај површину правоугаоника ако је обим најмањег квадрата 2 cm.



Сл. уз зад. 288



Сл. уз зад. 289

289. Маја је означила врхове коцке словима, као што је приказано на слици. Затим је словима дала вредности тако да збир четири броја на свакој страни коцке (у теменима сваког квадрата) буде једнак. Мајина сестра је избрисала неке бројеве, па тренутно знамо, да је: $A = 1$, $C = \frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{2}$, $G = 1$, $H = \frac{1}{4}$. Одреди вредности слова B, D и E.

290. У 6 сати казаљке сата образују опружен угао. За колико минута ће казаљке први пут образовати угао од $70°$?

VI разред

291. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи

$$x^2 \cdot |y| = 2009.$$

292. Конструиши троугао ABC ако је позната страница $a = BC$, висина h_a која одговара тој страници и полупречник r_o описане кружнице око троугла ABC.

293. На једном острву $\frac{3}{4}$ мушкараца су ожењени, а $\frac{2}{3}$ жена су удате. Који део становништва острва није у браку ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

294. На страницама AB и BC ромба $ABCD$ изабране су тачке E и F тако да је $AE = BF$. Угао BAD тог ромба је $60°$. Докажи да је троугао DEF једнакостраничан.

295. Дато је 5 природних бројева a, b, c, d и e, чији је збир 2009. Збир нека 3 од њих је 1000. Докажи да је $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ дељиво са 4.

VII разред

296. Докажи да је број $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ квадрат неког природног броја.

297. Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36 cm, ако за странице тог троугла важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).

298. Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.

299. Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10 cm.

300. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

VIII разред

301. Докажи да ребус са десне стране нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.

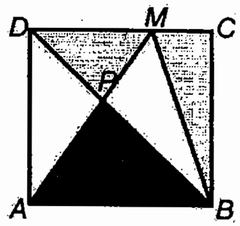
$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ +\ ABCD \\ \hline 2009 \end{array}$$

302. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Са S је означен центар те коцке. Израчунај запремину пирамиде A_1BC_1S.

303. Ако за природне бројеве a, b и c важи $a + b + c = 2010$, докажи да је $a^3 + b^3 + c^3$ дељиво са 6.

304. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 20?

305. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је M произвољна тачка на страници CD и пресек дужи AM и BD је тачка P (слика). Шта је веће: површина троугла ABP или збир површина троуглова MDP и BCM?



Сл. уз зад. 305

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

VI разред

306. Одреди целе бројеве x, y и z такве да је $x < y < z$ и $x \cdot y \cdot z = 2009$.

307. Дате су 4 „плаве" и 5 „црвених" тачака, тако да међу тих 9 тачака нема колинеарних. Колико троуглова, чија сва темена нису исте боје, одређују ове тачке?

308. Ако Вера уложи у банку 25 000 динара на годину дана, добиће камату од $p\%$. На сав новац који уложи преко 25 000 динара добија $(p+2)\%$ камате. Колико новца је Вера уложила у банку ако је укупна камата за годину дана била $(p + 0{,}4)\%$?

309. Дат је оштроугли разностранични троугао ABC са ортоцентром H и центром описане кружнице O. Нека је D пресечна тачка праве BO и описане кружнице ($B \neq D$). Докажи да је четвороугао $AHCD$ паралелограм.

310. Број је „леп" ако је непаран и једнак збиру три узастопна цела броја. Докажи:

а) збир два лепа броја није леп,

б) производ два лепа броја јесте леп број.

VII разред

311. Ако $13 \mid (a^2 + b^2)$, докажи да $13 \mid (2a + 3b)(3a + 2b)$.

312. У круг полупречника 1 су уписани правоугаоник $ABCD$, са страницама $AB = a$ и $BC = b$, и једнакокраки троугао CDE са основицом CD. За које вредности странице b троугао CDE и правоугаоник $ABCD$ имају једнаке површине?

313. Одреди све природне бројеве x и y такве да је $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2009}$.

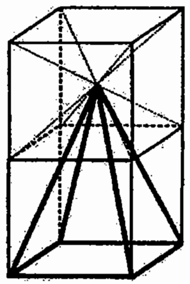
314. Две наспрамне странице конвексног четвороугла леже на узајамно нормалним правим и њихове дужине су 8 cm и 6 cm. Одреди дужину дужи која спаја средишта дијагонала тог четвороугла.

315. Бранко је изабрао 4 броја. Воја је за свака два Бранкова броја израчунао разлику већег и мањег броја и добио бројеве: 2, 2, 3, 4, 5, 6. Вера тврди да је Воја погрешио у рачуну. Да ли је Вера у праву?

VIII разред

316. Одреди све вредности реалних бројева a, b, c и d за које је

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a(b+c+d).$$



Сл. уз зад. 317

317. Дате су две једнаке коцке. Једна је стављена на другу тако да формирају квадар. Направљена је пирамида чији је врх средиште горње коцке, а основа основа доње коцке (слика). Одреди који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.

318. Нека је $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$. Одреди све вредности за x за које важи

$$\frac{x^{2009}+1}{2}+\frac{2x^{2009}+1}{3}+\dots+\frac{n\cdot x^{2009}+1}{n+1}=n.$$

319. Страница квадрата $ABCD$ је дужине a. Нека је M средиште странице BC, а X подножје нормале из темена A на дуж MD. Израчунај обим троугла ABX у зависности од странице a.

320. Докажи да је $\dfrac{1}{2009}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2007}{2008}<\sqrt{\dfrac{1}{2009}}$.

ТРЕЋА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

321. Дати су природни бројеви a, b и n такви да је a^2+2nb^2 потпун квадрат. Докажи да се број a^2+nb^2 може приказати као збир квадрата два природна броја.

322. У једнакокрако-правоуглом троуглу ABC уписана је кружница. Нека је CD висина на хипотенузу ($D \in AB$), и нека је P (други) пресек уписане кружнице и висине CD. У ком односу кружница дели дуж AP?

323. На сваком пољу табле димензија $n \times n$ ($n \geqslant 2$) налази се по један жетон. У једном кораку померамо сваки жетон на једно њему суседно дијагонално поље. После неког корака на једном пољу може се налазити више жетона. Одреди најмањи број поља на која се могу поставити сви жетони после неког броја померања.

324. У запису 2009-цифреног природног броја појављују се само цифре 5 и 8. Докажи да се изостављањем само једне цифре може добити 2008-цифрени број дељив са 11.

325. Одреди све двоцифрене бројеве $\overline{AB}$, такве да $\overline{AB}$ дели $\overline{A0B}$.

326. Из скупа $\{1,2,3,\dots,2009\}$ изабрано је 1005 бројева, тако да збир никоја два није ни 2009 ни 2010. Одреди све начине на које је могуће изабрати тих 1005 бројева.

327. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да је

$$\measuredangle CBD=2\measuredangle ADB,\quad \measuredangle ABD=2\measuredangle CDB \quad \text{и} \quad AB=CB.$$

Докажи да је четвороугао $ABCD$ делтоид.

328. За позитивне реалне бројеве x, y, z важи

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}.$$

Докажи неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{1}{3}.$$

ТРИНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Сарајево (Босна и Херцеговина), 2009.

329. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао такав да је $AB + CD = BC + DE$ и k круг са центром на страници AE који додирује странице AB, BC, CD и DE у тачкама P, Q, R и S (различитим од темена петоугла), редом. Доказати да су праве PS и AB паралелне.

330. Решити у скупу ненегативних целих бројева једначину

$$2^a \cdot 3^b + 9 = c^2$$

331. Нека су x, y и z реални бројеви такви да је

$$0 < x,\, y,\, z < 1$$

и

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z).$$

Доказати да је бар један од бројева $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ већи или једнак од $\frac{1}{4}$.

332. Свака од 2009 различитих тачака у равни обојена је плавом или црвеном бојом, тако да се на свакој јединичној кружници са центром у плавој тачки налазе тачно две црвене тачке. Одредити највећи могући број плавих тачака.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

III разред

333. Напиши (на папиру који предајеш) све парне бројеве седме стотине који су записани у нацртаној таблици.

606	611	703	610
780	600	665	644
872	677	755	688
700	674	858	622
735	788	756	630
767	679	753	672

Сл. уз зад. 333

334. Запиши речима бројеве написане римским цифрама: а) IV; б) CCXLII; в) CM.

335. Напиши све бројеве који се пишу цифрама 1, 4 и 7 (цифре се могу понављати), а који су већи од 242 и мањи од 466.

336. Који од бројева 723, 732 и 273 се највише смањи и за колико ако у сваком од њих цифре 7 и 3 замене места?

337. Дата је дуж $AC = 25\,\mathrm{cm}$. Између тачака A и C је тачка B, таква да је $BC = 8\,\mathrm{cm}$. Тачка D је дата тако да је C између B и D и да је $BD = 21\,\mathrm{cm}$. Израчунај дужину дужи AD.

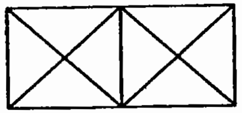
IV разред

338. Ако цифре 5 и 4 замене места, који од бројева 35246, 42385, 45263 и 75234 ће се највише повећати и за колико?

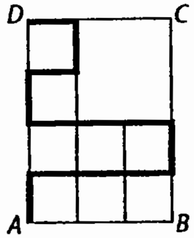
339. Када је један број прво увећан за 17 200, па затим умањен за 8 620, добијен је број 88 888. О ком броју је реч?

340. Колико троуглова можеш да уочиш на слици на следећој страни? Образложи одговор.

341. На слици је 8 мањих (међусобно једнаких) и један већи квадрат. Ако је обим правоугаоника $ABCD$ једнак 28 cm, израчунај дужину назначене изломљене линије.



Сл. уз зад. 340

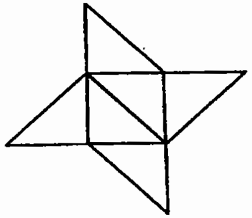


Сл. уз зад. 341

342. На папиру који ћеш предати прецртај табелу са слике па доврши попуњавање табеле.

+	4080		
		10000	9000
	4980		7565
		10000	

Сл. уз зад. 342



Сл. уз зад. 346

V разред

343. Израчунај збир првих десет сложених (природних) бројева.

344. Одреди бројеве x и y ако је

$$\{1, x, 3, 4, 5\} \cup \{y, 2, 3, 15\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 15, 45, 54\}.$$

345. Дат је круг $K(S, r)$ и ван круга тачка M. Најкраће растојање тачке M од круга K је 3 cm, а највеће растојање тачке M од круга је 11 cm. Колики је полупречник тога круга?

346. Колико дужи, а колико троуглова има на слици? Образложи одговор.

347. Замени звездице неким цифрама тако да буде тачан следећи рачун:

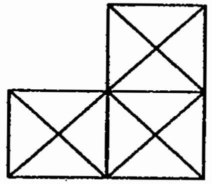
$$2009 \cdot **** = ****2010.$$

VI разред

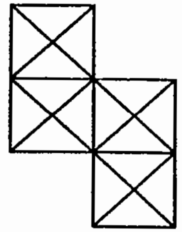
348. Израчунај вредности израза a, b, c, d и e ако је:
$a = -3 - 8$, $b = 2 - |-4|$, $c = |a - b|$, $d = -(c - b)$, $e = a + b + c + d$.

349. Упореди углове троугла ABC ако за његове странице a, b и c важи да је $b = a + 2$, $c = b - 1$, а његов обим је 72.

350. Колико троуглова можеш да уочиш на слици? Образложи одговор.



Сл. уз зад. 350



Сл. уз зад. 356

351. Мајка и ћерка су рођене у истом веку. Колико година је мајка старија од ћерке ако је данас производ њихових година 2010?

352. У унутрашњости троугла ABC дата је тачка P. Покажи да је $\measuredangle ACB < \measuredangle APB$.

VII разред

353. а) Израчунај $(3\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3})^2$.

б) Упрости израз $\sqrt{(x+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(x-2)^2} + 2\sqrt{3} - 2$ ако је $x = 2 - \sqrt{3}$.

354. Странице правоуглог троугла имају дужине 20 cm, 25 cm и 15 cm. Колико је теме правог угла тог троугла удаљено од хипотенузе троугла? Колико је подножје хипотенузине висине удаљено од катета троугла?

355. Нека је $ABCD$ квадрат странице $AB = 10\,\text{cm}$. Тачка M је средиште странице BC, а тачка E је симетрична са тачком A у односу на праву BC. Израчунај:

а) дужину изломљене линије $ABDCME$;

б) обим и површину четвороугла $AECD$.

356. Колико троуглова можеш да уочиш на слици? Образложи одговор.

357. Нађи све целе бројеве n за које је $\dfrac{45}{45-n}$ квадрат неког природног броја.

VIII разред

358. Ако је број дијагонала многоугла 5 пута већи од броја његових страница, колико тај многоугао има страница?

359. Колико правих одређују темена коцке?

360. Дешифруј сабирање (истим словима одговарају исте, а различитим, различите цифре): АВ + АВ = ПАС.

361. Реши неједначину $(2x-4)(x-5)^2 > 0$.

362. Равни π_1 и π_2 су узајамно нормалне. Тачке A и B припадају њиховој заједничкој правој тако да дуж AB има дужину $24\,\text{cm}$. Једнакостранични троугао ABD је у равни π_1 а једнакокраки провоугли троугао ABE са хипотенузом AB је у равни π_2. Израчунај растојање тачака D и E.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

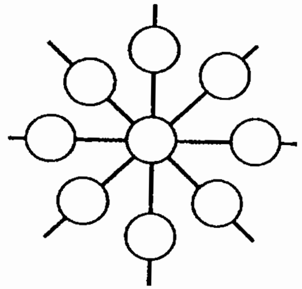
III разред

363. Запиши речима:

а) највећи непаран број мањи од 500;

б) најмањи паран број треће стотине.

364. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Затим, бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 упиши у кругове тако да је збир бројева у круговима на свакој од четири праве исти.



Сл. уз зад. 364

365. Нацртај кружну линију са центром у тачки A. Обележи једну тачку те кружне линије са B и нацртај кружну линију са центром у тачки B. Нацртај тачке C, D и E тако да C припада тачно једном од добијених кругова, D припада и једном и другом добијеном кругу а E не припада ниједном од добијених кругова.

366. Сваком од бројева између 60 и 70 дописана је нула између цифре десетице и цифре јединице.

а) Израчунај највећи могући збир почетног двоцифреног и од њега добијеног троцифреног броја;

б) Израчунај најмању разлику која се добија када се почетни двоцифрен број одузме од добијеног троцифреног броја.

367. Када је у Београду 18.00 часова, у Москви је 20.00 часова. Авион на линији Москва-Београд је у Београд слетео у подне. Ако је лет трајао 2 сата и 40 минута, у колико сати је авион полетео из Москве (по московском времену)?

IV разред

368. Колико има четвороцифрених бројева облика 4**7 ?

369. Када се једна страница правоугаоника повећа за $48\,\text{cm}$, добија се квадрат обима $2008\,\text{cm}$. Израчунај дужину странице квадрата и обим првобитног правоугаоника.

370. Ако је $x - 2009 = 3434$, колико је:

а) $(x+2009)-2009$, б) $(x-2000)-2009$?

371. Зграда има три спрата. На другом и трећем спрату живи 20 особа, а на првом и другом спрату живе 22 особе. Колико људи станује на сваком спрату, ако је број особа на другом спрату једнак укупном броју особа на првом и трећем спрату?

372. Прецртај на папир који ћеш предати магични квадрат са слике па га попуни.

26		28
	29	

Сл. уз зад. 372

V разред

373. Одреди најмањи и највећи петоцифрени број дељив са 2010.

374. Упореди разломке $\frac{61}{2010}$ и $\frac{5}{149}$.

375. Броју 2009 дописати са леве и са десне стране једну исту цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12.

376. Дати су скупови $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2,3\}$, $S_3 = \{4,5,6\}$, $S_4 = \{7,8,9,10\}$, ... Одреди збир елемената скупа S_{10}.

377. Колики угао заклапају сатна и минутна казаљка на часовнику у 8 часова и 10 минута?

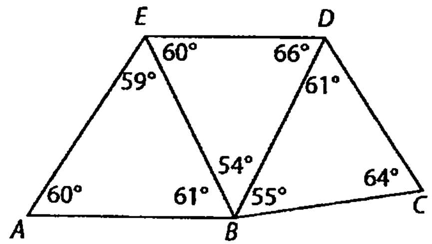
VI разред

378. Ако су a, b и c цели бројеви и ако је $a \cdot b = -6$, $a \cdot c = -10$ и $b \cdot c = 15$, израчунај $a \cdot b \cdot c$, a, b и c.

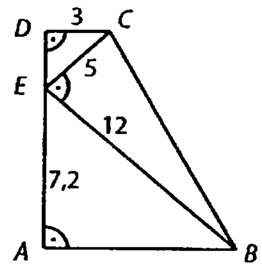
379. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао ABE при чему је тачка E у унутрашњости квадрата. Израчунај угао DEC.

380. Одреди $n \in \mathbf{N}$ тако да је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ природан број.

381. Седам дужи формирају три троугла као на слици. Која од тих седам дужи је најдужа?



Сл. уз зад. 381



Сл. уз зад. 384

382. У једнакостраничном троуглу странице 4 cm на случајан начин је распоређено 17 тачака. Докажи да постоје две тачке чије је растојање мање од 1 cm.

VII разред

383. Да ли је $\sqrt{0,\overline{1}}$ рационалан или ирационалан број? $[0,\overline{1} = 0,111\ldots]$

384. Израчунај обим и површину трапеза са слике.

385. Шта је веће, 2^{2010} или 5^{861}?

386. Четири друга имају по једну оловку. На колико начина они могу да размене своје оловке али тако да ниједан друг не добије своју оловку?

387. На страници AB троугла ABC дата је тачка D, а на страници AC тачка E тако да изломљена линија DEB дели троугао ABC на три троугла једнаких површина. У ком односу тачка D дели страницу AB, а у ком односу тачка E дели страницу AC?

VIII разред

388. Реши једначину $\big||x|+1\big|+2\big| = 2010$.

389. Површина основе правилне тростране призме је $36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ а однос површине једне основе и површине омотача је $\sqrt{3} : 2$. Израчунај запремину призме.

390. Колико равни одређују темена коцке?

391. Тачка D је пресек симетрале угла BAC и странице BC троугла ABC. Ако је $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$ и $|AC| = 15\,\mathrm{cm}$, доказати да је $|AD| < 12\,\mathrm{cm}$.

392. Група људи подели неку суму новца тако што је први добио 10 динара и десетину остатка; други 20 динара и десетину новог остатка; трећи 30 динара и десетину новог остатка, ... и тако све док нису поделили целокупну суму. На крају се испоставило да су сви добили исте суме новца. Колико људи је делило новац?

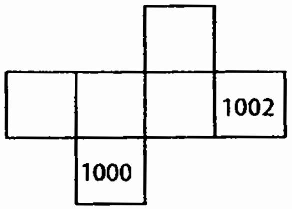
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

IV разред

393. Збир два броја је 56, количник 4, а остатак 1 (при дељењу првог другим). Који су то бројеви?

394. Колико има двоцифрених бројева код којих је цифра јединица већа од цифре десетица?

395. На слици је дата мрежа коцке и у два њена квадрата уписани су бројеви 1000 и 1002. Упиши још четири различита парна четвороцифрена броја (у преостала 4 квадрата) тако да збирови бројева на супротним странама коцке (када је склопимо) буду једнаки 2010.

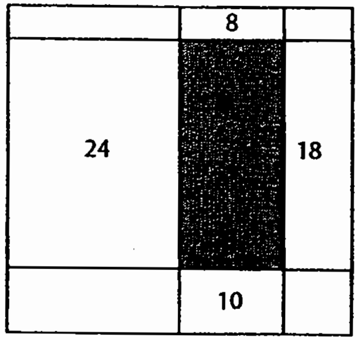


Сл. уз зад. 395

2	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Сл. уз зад. 396

396. На колико начина из дате табеле можемо да прочитамо број 2010 ако можемо да се крећемо само у 3 смера: десно, доле и дијагонално десно-доле?



Сл. уз зад. 397

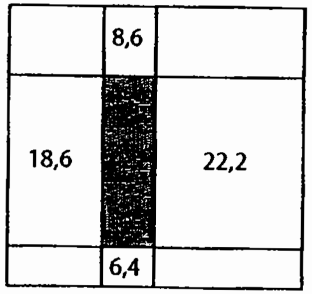
397. Квадрат странице $10\,\mathrm{cm}$ подељен је на 9 правоугаоника као на слици. У четири правоугаоника су записани њихови обими (у центиметрима). Израчунај обим осенченог правоугаоника.

V разред

398. Попуни магични квадрат на слици.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Сл. уз зад. 398



Сл. уз зад. 401

399. Збир половине, четвртине и осмине угла α једнак је углу који је суплементан углу α. Израчунај угао α.

400. Одреди: а) најмањи; б) највећи шестоцифрени природни број коме су све цифре различите и који је дељив са 9.

401. Квадрат странице 10 cm подељен је на 9 правоугаоника као на слици. У четири правоугаоника су записани њихови обими (у центиметрима). Израчунај обим осенченог правоугаоника.

402. Колико има четвороцифрених природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара једнак 10?

VI разред

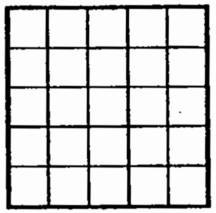
403. Ако је $\frac{a}{b} = -3$, израчунај $\frac{-2}{\frac{a}{b}} + \frac{\frac{b}{a}}{-2}$.

404. Конструиши троугао ABC ако су дати висина из темена C, $h_c = 4\,\mathrm{cm}$, углови $\alpha = 75°$ и $\beta = 45°$.

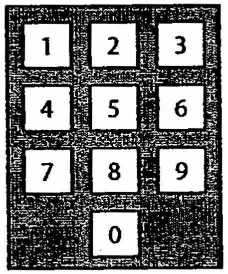
405. Одреди цифре a и b такве да је збир $\overline{991a} + \overline{b234}$ дељив бројем 18.

406. Дат је једнакокрако-правоугли троугао ABC са хипотенузом AB. Над страницом BC конструисан је једнакостранични троугао BCD. Израчунај угао ADB.

407. Дат је квадрат 5×5. Подели овај квадрат „сечењем" по линијама нацртане мреже на 7 правоугаоника, тако да међу њима нема подударних.



Сл. уз зад. 407



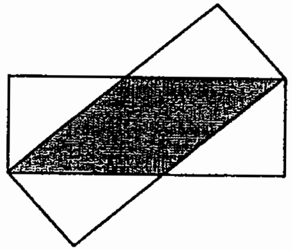
Сл. уз зад. 408

VII разред

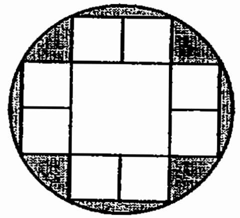
408. Ако је x природан број већи од 1 и $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$, колико је $x + \frac{1}{x}$, $x - \frac{1}{x}$ и x?

409. Типке на телефону су распоређене тако да је растојање између центара две суседне типке 12 mm (види слику, суседне су типке које су лево, десно, горе или доле од посматране). Да ли је најкраћа путања која је „повучена прстом" када бирамо број Друштва математичара Србије 0113036818, рачунајући да притискамо увек тачно у центар типке, дужа од 21 cm?

410. Два подударна правоугаоника који се преклапају као на слици имају странице дужине 5 cm и 12 cm. Израчунај површину осенченог дела.



Сл. уз зад. 410



Сл. уз зад. 414

411. Да ли постоји n-тоугао код кога је укупан број дијагонала за 2010 већи од броја страница?

412. Одреди последњу цифру броја $\frac{44^{44}}{2}$.

VIII разред

413. Производ два природна броја је два пута већи од њиховог збира. О којим бројевима је реч?

414. У круг полупречника 1 cm уцртано је 9 квадрата међу којима је 8 једнаких, тако да је по једно теме сваког од 8 једнаких квадрата на кружници (види слику). Израчунај површину дела круга који је ван упртаних 9 квадрата.

415. Тачка $A(32, 76)$ спојена је са координатним почетком O. Колико тачака на дужи OA има обе координате које су природни бројеви?

416. На ивицама AB и BC коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дате су тачке M и N, такве да је $BN = BM$. Израчунај дужину дужи BN ако раван MND_1 заклапа са равни ABC угао од $45°$, а ивица коцке је 10 cm.

417. Папир правоугаоног облика исечемо на два дела. Затим један од добијених делова поново исечемо на 2 дела. Ово понављамо укупно 5 пута (сечења су увек по правој линији). Колико највише, а колико најмање темена могу имати све добијене фигуре заједно?

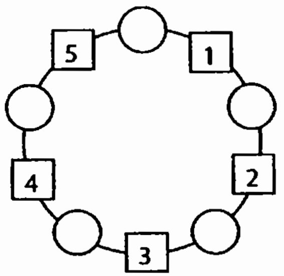
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

VI разред

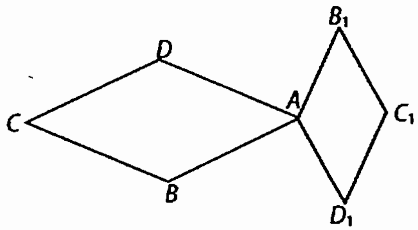
418. Одреди просте бројеве p, q, r, s и t, такве да је $p{\cdot}q{\cdot}r{\cdot}(s+t) = 2010$. Бројеви не морају сви бити међусобно различити.

419. Нека је тачка M на страници BC, а тачка K на страници AC троугла ABC. Да ли дужи AM и BK могу да се секу тако да тачка пресека полови ове дужи?

420. У сваки кружић упиши по један број тако да је сваки број у квадратићу једнак збиру бројева у два њему суседна кружића (види слику).



Сл. уз зад. 420



Сл. уз зад. 421

421. Ромб $ABCD$ и ромб $AB_1C_1D_1$ имају заједничко теме A и при томе је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ (види слику). Докажи да средина дужи BD_1, пресек дијагонала ромба $ABCD$ и пресек дијагонала ромба $AB_1C_1D_1$ су темена једнакокраког троугла.

422. На математичком такмичењу учествовало је 2010 ученика. Докажи да се међу њима може изабрати 45 ученика таквих да су или сви из истог града или сви из различитих градова.

VII разред

423. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 6 даје остатак b, а при дељењу са 9 даје остатак c. Ако је $a+b+c = 15$, одреди остатак при дељењу броја n са 18.

424. Нека су a, b и c природни бројеви који су дужине страница троугла у центиметрима. Једна висина тог троугла једнака је збиру друге две. Докажи да је $a^2 + b^2 + c^2$ квадрат неког природног броја.

425. У земљи чуда цене се мењају свакога дана. Првог дана се повећају за 1%, наредног дана се смање за 1%, затим се следећег дана поново повећају за 1%, па се наредног опет смање за 1%, и тако даље. Да ли је цена после 2010 дана иста као на почетку?

426. Дат је квадрат $ABCD$. У спољашњости квадрата конструисане су полукружнице k_1 и k_2 над пречницима AB и BC, редом. Права кроз теме B сече k_1 у тачки M, а k_2 у тачки N. Докажи да су дужи CM и DN нормалне.

427. Да ли је могуће заменити слова цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да буде тачна једнакост $ZEC+VUK+SLON = 2010$?

VIII разред

428. Реши систем једначина

$$\begin{aligned} |x| + y + z &= 2009 \\ x + y + z &= 2010 \\ x + y + 2z &= 2011 \end{aligned}$$

429. Дат је једнакостранични троугао ABC. Над страницом BC, као пречником, конструисана је полукружница у спољашњости троугла. Тачке D и E деле полукружницу на три једнака дела. Докажи да дужи AD и AE деле страницу BC на три подударне дужи.

430. На свакој страни коцке написан је по један природан број. На теменима коцке написан је број који је једнак производу бројева који су написани на странама коцке које одређују то теме. Наћи збир свих бројева написаних на странама коцке ако је збир бројева написаних на теменима једнак 105.

431. Збир три ивице правилне n-тостране призме које полазе из једног темена те призме је 100. Колика је највећа могућа површина омотача те призме?

432. Квадрат 19×19 подељен је на јединичне квадрате (поља). Обојено је 95 поља. Докажи да постоји правоугаоник 5×3 (који се састоји од 15 поља) у коме се налазе највише три обојена поља.

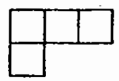
ЧЕТВРТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

433. Нека су тачке E и F подножја висина из темена B и C троугла ABC. Тачка M је подножје нормале из тачке F на страницу BC, а тачка N је подножје нормале из тачке B на праву EF. Докажи да су праве AC и MN паралелне.

434. Нека су x и y бројеви из интервала $[1,2]$. Докажи да је

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\leqslant\frac{9}{2}.$$

435. Одреди просте бројеве p за које је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5$ дељиво са 13.



Сл. уз зад. 436

436. Табла димензија 7×7 је покривена L-фигурама састављеним од 4 једнака квадрата (слика), тако да је тачно једно поље остало непокривено. Одреди сва поља табле која могу остати непокривена.

437. Наћи све троцифрене природне бројеве $A<500$ који имају следеће својство: „Ако се један иза другог испишу бројеви A, $2A$ и A, добије се деветоцифрени број који је потпун квадрат и који има тачно 4 различита проста делиоца“.

438. Докажи следећу неједнакост за све позитивне реалне бројеве a, b и c:

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{bc}+\frac{b^2+2c^2+4a^2}{ac}+\frac{c^2+2a^2+4b^2}{ab}\geqslant 21.$$

Када важи једнакост?

439. На табли је написано 2010 природних бројева и један од њих је број 2011. Познато је, такође, да је за свака два написана броја на табли написана и апсолутна вредност њихове разлике. Докажи да су сви бројеви написани на табли дељиви са 2011.

440. На страници BC троугла ABC изабрана је тачка M тако да тежиште троугла ABM припада кружници описаној око троугла ACM, а тежиште троугла ACM припада кружници описаној око троугла ABM. Доказати да су тежишне дужи из темена M, троуглова ABM и ACM, једнаке.

ЧЕТРНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Баиле Оланешти (Румунија), 2010.

441. Реални бројеви a, b, c, d задовољавају следећи систем једнакости:

$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$

Доказати да је $a+b+c+d\neq 0$.

442. Наћи све природне бројеве n такве да је $n\cdot 2^{n+1}+1$ потпун квадрат.

443. Нека су AL и BK симетрале углова неједнакокраког троугла ABC (L припада страници BC, K припада страници CA). Симетрала дужи BK сече праву AL у тачки M. Тачка N праве BK је таква да је $LN\parallel MK$. Доказати да је $LN=NA$.

Сл. уз зад. 444

444. Правоугаоник димензија 9×7 покривен је фигурама двају облика (види слику; квадрати се састоје од четири јединична квадратића, а L-облици од три и могу се више пута ротирати за 90°). Нека је $n \geqslant 0$ број фигура димензија 2×2 које се могу искористити у оваквом покривању. Нађи све могуће вредности броја n.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

III разред

445. Израчунај $209 + 211 - (208 + 210)$.

446. Попуни табелу уписујући бројеве уочених оштрих, правих и тупих углова на сваком од слова.

	П	Е	Т	А	Р
оштри			/		
прави			2		
тупи			/		

Сл. уз зад. 446

447. Запиши све троцифрене бројеве који се пишу цифрама 5, 3 и 8 (цифре се могу понављати) а који су већи од 555.

448. Може ли се круг помоћу 3 праве поделити на 5 делова? Ако може да се подели, нацртај како!

449. Танасије зна да ће му остати 46 динара ако купи 3 свеске, а да му за куповину 5 таквих свезака недостаје 90 динара. Колико динара кошта једна свеска?

IV разред

450. а) Израчунај број који је за 45568 већи од 109109.

б) Израчунај број који је за 60006 мањи од 100000.

451. Прецртај десет цифара у низу 2011201120112011 тако да шестоцифрени број који се састоји од преосталих цифара буде:

а) највећи могући; б) најмањи могући.

452. Како од 16 датих палидрваца може да се направи фигура на којој може да се уочи 5 квадрата и 10 правоугаоника (који нису квадрати)?

Сл. уз зад. 452

453. На колико најмање, а на колико највише делова 4 праве (свака права сече круг) могу поделити круг?

454. Дешифруј сабирање на слици (иста слова замени истом цифром, а различита различитим цифрама).

$$\begin{array}{r} A\,A\,A \\ +\quad B\,B \\ \hline 4\;A\;2 \end{array}$$

V разред

455. Израчунај $2011 - 1111 : 11 - 11011 : 11 + 110011 : 11$.

456. Скуп A има 2009 елемената, скуп B има 2010, а њихова унија има 2011 елемената. Колико елемената има њихов пресек?

457. Одреди угао који је суплементан са својом осмином.

458. Производ три узастопна парна броја је 960. Одреди њихов збир.

459. Милица је прве недеље прочитала $\frac{5}{7}$ књиге која има 840 страница. Друге недеље је прочитала $\frac{3}{4}$ остатка књиге. Колико јој је страница остало да прочита треће недеље и да стигне до краја књиге?

VI разред

460. Који број треба да стоји уместо $*$ да би једнакост

$$(2006 + 2005 + 2004 + 2003) - (2010 + 2009 + 2008 + 2007) = 1999 - *$$

била тачна?

461. Одреди углове троугла ABC чији спољашњи угао β_1 је три пута већи од суседног унутрашњег угла, а два пута већи од једног несуседног унутрашњег угла троугла.

462. Дати су скупови $A = \{-5, -4, -2, 1, 3\}$ и $B = \{-3, -1, 0, 2\}$. Одреди елементе скупа $C = \{c \mid c = |a + b|, a \in A, b \in B\}$.

463. Мерни бројеви страница троугла (у cm) су природни бројеви. Ако је обим троугла 22 cm и једна страница 11 cm, колико центиметара могу имати друге две странице тог троугла?

464. Збир k ($k > 1$) узастопних целих бројева је 9. Који су то бројеви? Колико решења има задатак?

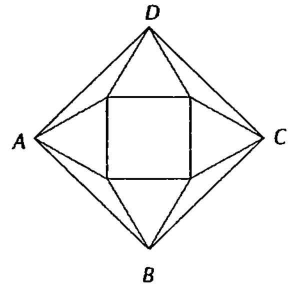
VII разред

465. Израчунај вредност израза

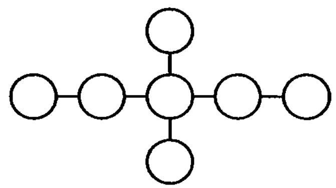
$$(-2\sqrt{3})^2 : \left(20 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2}{2}\right).$$

466. Одреди узајамно просте бројеве x и y такве да је $\frac{x}{y} = -0{,}20112011\ldots$ (2011 се понавља).

467. Над страницама квадрата странице $a = 4\,\mathrm{cm}$ конструисани су једнакостранични троуглови. Докажи да је четвороугао $ABCD$ квадрат. Види слику!



Сл. уз зад. 467



Сл. уз зад. 469

468. Реши једначину $\sqrt{x^2} = x + 5$.

469. Прецртај слику на папир који ћеш предати! Попуни кружиће са слике бројевима 7, 72, 73, 74, 75, 76, 77 тако да збир последњих цифара бројева у пет кружића водоравно буде једнак са збиром последњих цифара бројева у три кружића усправно.

VIII разред

470. Странице једног троугла су 12 cm, 24 cm и 15 cm. Израчунај странице њему сличног троугла ако је:

а) коефицијент сличности $3:4$ (однос страница датог троугла у односу на странице сличног троугла);

б) најдужа страница њему сличног троугла 32 cm;

в) обим њему сличног троугла 34 cm;

г) разлика најдуже и најкраће странице њему сличног троугла 4,5 cm.

471. Који број треба да стоји уместо * да би квадрат на слици био магичан?

*		
	15	9
		24

472. Вера је од жице дужине 64 m направила квадар чије су две суседне ивице једнаке. Одреди дужине ивица квадра ако је Вера употребила сву жицу коју је имала.

473. Једна страница правоугаоника $ABCD$ је 6 cm, а дијагонала је од друге странице дужа за 2 cm. Израчунај обим и површину четвороугла BB_1DD_1 где су B_1 и D_1 пресеци нормала из темена B и D, редом, са дијагоналом AC.

474. Израчунај x ако је $\dfrac{x}{0{,}016:0{,}12+0{,}7}=\dfrac{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}{1{,}2:0{,}375-0{,}2}$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

III разред

475. Нацртај четири праве a, b, c и d, ако знаш да је права a нормална на праву b, права c нормалана на b, а d паралелна са a. Затим попуни

табелу стављајући знак $\perp$ (ако су праве нормалне) или $\parallel$ (ако су праве паралелне):

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

476. Вера је рођена деведесетог дана 2009. године. Колико дана је стара Вера данас (5. марта 2011. године)?

477. Израчунај збир и разлику највећег и најмањег троцифреног броја од којих сваки има збир цифара 8.

478. У квадрате на слици упиши бројеве 2, 5, 7, 13, 16 и 21 тако да између свака два броја важи неједнакост одређена знаком који стоји између њих.

$$\square < \square < \square < \square > \square > \square$$

479. У земљи Ненадији постоји метални новац од 1 јоцка, 2 јоцка, 5 јоцка, 10 јоцка и 15 јоцка. Харалампије има 7 новчића у џепу. Ако има највише 2 метална новчића од исте врсте, колико највише, а колико најмање јоцка може имати Харалампије?

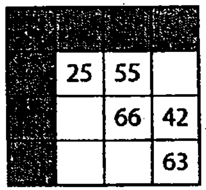
IV разред

480. Правоугаоник страница 44 cm и 16 cm издељен је на квадрате обима 16 cm. Колико има таквих квадрата?

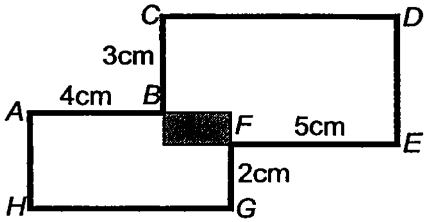
481. Колико има четвороцифрених бројева са збиром цифара 4, којима је збир прве две цифре једнак збиру последње две цифре?

482. Три друга, Боба, Јова и Мома, скупљају сличице фудбалера. Боба има три пута више сличица од Јове, а Јова два пута више сличица од Моме. Колико сличица има сваки од њих ако Боба и Мома заједно имају 210 сличица?

483. Доврши попуњавање табеле на слици одговарајућим чиниоцима и производима.



Сл. уз зад. 483



Сл. уз зад. 484

484. Два правоугаоника имају заједнички осенчени део (види слику). Тај део је облика правоугаоника чији је обим 6 cm. Ако је $AB = 4\,\mathrm{cm}$, $BC = 3\,\mathrm{cm}$, $EF = 5\,\mathrm{cm}$, $FG = 2\,\mathrm{cm}$, одреди дужину затворене изломљене линије $ABCDEFGHA$.

V разред

485. Одреди збир свих разломака који су једнаки $\frac{1}{2}$ и такви су да им је именилац већи од 2, а бројилац мањи од 100.

486. Две праве се секу. Израчунај добијене углове ако се зна да је:

а) збир два од четири тако добијена угла $73°$;

б) разлика два од четири тако добијена угла $73°$;

в) збир три од четири тако добијена угла $273°$.

487. У једнакости $a+b=c+d=e+f$ слова означавају различите просте бројеве мање од 30. Одреди бар једно решење за слова a, b, c, d, e и f.

488. Ивица коцке је a. Када се та ивица повећа за 2 cm, површина тако добијене коцке је за $96\,\mathrm{cm}^2$ већа од првобитне. Израчунај површину првобитне коцке.

489. Које године је рођена особа која 2011. године пуни онолико година колики је збир цифара године њеног рођења?

VI разред

490. Ако је $x = 12+4$, $y = 12:4$, $z = 12\cdot 4$, израчунај:

а) $(x+y)\cdot(x-z)$, б) $\frac{z-x}{x-y}$, в) $\frac{x\cdot y+z}{z:x}$.

491. Странице правоуглог троугла су 6 cm, 10 cm и 8 cm. Израчунај растојање тежишта тог троугла од средишта хипотенузе.

492. Одреди целе бројеве a, b и прост број p такве да је $|a\cdot b|\cdot p = 4022$.

493. Разлика највећег и најмањег угла једнакокраког троугла је $8°$. Одреди углове тог троугла.

494. Одреди: а) највећи, б) најмањи природан број чији је производ цифара 7560, а у запису броја се не појављује цифра 1.

VII разред

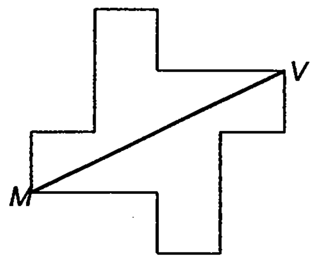
495. Израчунај: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^4\cdot(3^5)^2$; б) $\frac{4^4\cdot 125^3}{(-50)^4}$.

496. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC дели средњу линију трапеза на одсечке дужина 2 cm и 5 cm. Ако је висина трапеза 3 cm, одреди однос површина троугла ABC и троугла ACD.

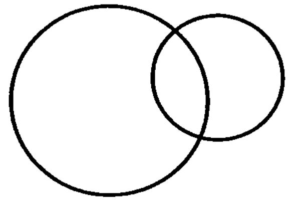
497. Реши једначину $\left|(\sqrt{x-2}\,)^2+1\right| = 7$.

498. Одреди све двоцифрене бројеве такве да је збир тога броја и броја који је написан истим цифрама обрнутим редом квадрат неког броја.

499. Фигура на слици састављена је од четири подударна правоугаоника чија је једна страница два пута већа од друге (види слику). Ако је површина фигуре $200\,\mathrm{cm}^2$, израчунај дужину дужи MV.



Сл. уз зад. 499



Сл. уз зад. 503

VIII разред

500. Одреди све рационалне бројеве x тако да је $\big|x+|x+|x||\big| = 2010$.

501. Дијагонала правилне четворостране призме је $16\sqrt{3}$ cm. Израчунај површину и запремину призме ако је дијагонала призме нагнута према равни основе под углом од 30°.

502. Потребно је направити железничку композицију од 4 путничка и 2 теретна вагона. На колико се начина може направити композиција ако се зна да теретни вагони не смеју бити један поред другог, при чему се не прави разлика између вагона исте врсте. Запиши све распореде вагона у композицији.

503. Два круга (види слику) секу се тако да је $\frac{6}{7}$ већег круга ван пресека, а $\frac{3}{4}$ мањег круга ван пресека. Ако је полупречник већег круга 7 cm, израчунај површину мањег круга.

504. За све могуће бројеве a, b и c, различите од нуле, одреди све вредности које може имати S ако је

$$S = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}.$$

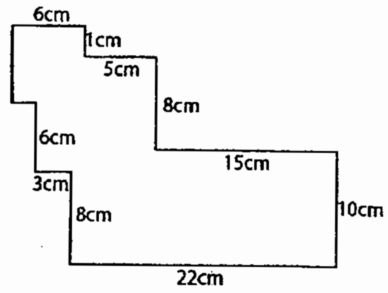
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

IV разред

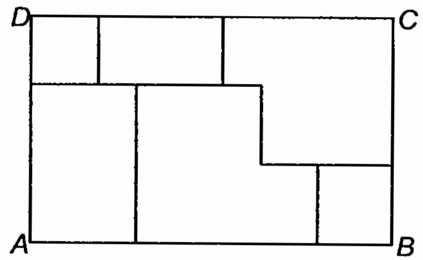
505. Којим бројем треба помножити број 257 тако да када се од тог производа одузме број 422, добија се број 88500?

506. Четвороцифрен и троцифрен број у разлици $**** - *** = 2011$ имају исту вредност ако их читамо и са леве и са десне стране. Одреди те бројеве.

507. Израчунај површину фигуре представљене на слици. Све странице фигуре припадају правим које су или паралелне или нормалне međусобно.



Сл. уз зад. 507



Сл. уз зад. 514

508. Од 12 једнаких коцки чија је ивица дужине 1 cm направљен је квадар. Који од овако добијених квадара има: а) најмању; б) највећу површину? Израчунај те површине.

509. Чика Ратко у џепу има 6800 динара. Тај износ има у новчаницама од 100 динара, 500 динара и 1000 динара. Број новчаница од 100 динара и од 500 динара је исти. Колико новчаница чика Ратко може да има?

V разред

510. Израчунај вредност израза $7 \cdot 1{,}2 - \frac{9}{10} : 0{,}3 - \frac{1}{2}$.

511. Испитај да ли је број $2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ прост или сложен.

512. Углови α, β и γ имају паралелне краке. Збир углова α и β је $2011'$, а разлика углова γ и β је већа од правог угла. Израчунај углове α, β и γ.

513. Дешифруј сабирање на слици ако су цифре P, Q, R и S различити прости бројеви.

$$\begin{array}{r} P \\ PQ \\ PQR \\ +\ PQRS \\ \hline *SQP \end{array}$$

514. Одреди збир обима свих шест фигура (види слику) које су настале поделом правоугаоника $ABCD$ чије су странице дужине $AB = 14{,}26$ cm и $BC = 11{,}3$ cm. Свака од страница свих шест фигура паралелна је једном пару страница правоугаоника $ABCD$.

VI разред

515. Изабери четири броја из скупа $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ тако да њихов производ буде:

а) највећи; б) најмањи.

Израчунај те производе.

516. Конструиши троугао ABC ако је $\measuredangle ACB = 90°$, $\measuredangle CAB = 15°$ и $CC_1 = 3\,\mathrm{cm}$, где је C_1 средиште странице AB.

517. Дат је правоугаоник чије су странице $10\,\mathrm{cm}$ и $67\,\mathrm{cm}$. У унутрашњости правоугаоника на случајан начин је распоређено 2011 тачака. Докажи да при ма ком распореду тачака постоје четири тачке које припадају једном истом квадрату странице $1\,\mathrm{cm}$.

518. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Докажи да је $CP = DQ$.

519. Нека су a, b, c разне цифре, све различите од нуле. Да ли збир

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$$

може бити једнак квадрату неког природног броја?

VII разред

520. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2009} - 2009b$?

521. Хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели хипотенузу на делове од $9\,\mathrm{cm}$ и $16\,\mathrm{cm}$. Одреди обим и површину тог троугла.

522. Да ли је број $2009 \cdot 2011 - 48$ сложен? Образложи одговор.

523. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA, тим редом, конвексног четвороугла $ABCD$ и M тачка унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Докажи да је четвороугао $MQCR$ паралелограм.

524. Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак производу прве две цифре и једнак двоцифреном завршетку тог четвороцифреног броја.

VIII разред

525. Израчунај површину фигуре ограничене правом $y = 4$ и графиком функције $y = |x+1| + |x-1|$.

526. Одреди вредност израза $a - b$ ако је

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^3}{5} + \cdots + \frac{2011^2}{4021} \quad \text{и} \quad b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{2010^2}{4021}.$$

527. Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки M, тако да је $BM : CM = 2012 : 2011$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AM у тачки S. Одреди однос дужи CS и SC_1.

528. Реши једначину $65x^3 + 4y^3 = 2011$ у скупу природних бројева.

529. Правилна четворострана пирамида $ABCDS$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α. Раван α сече основне ивице AB, AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M, N, P тако да је

$$AM : MB = 1 : 1, \qquad AN : ND = 2 : 1, \qquad AP : PS = 3 : 1.$$

Израчунај размеру запремина делова пирамиде које одређује раван α.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

VI разред

530. Испред и/или иза броја 357 допиши цифре 3, 5 и 7, тако да нови шестоцифрени број буде дељив истовремено са 3, 5 и 7.

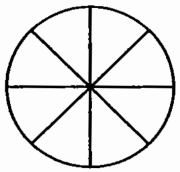
531. Спољашњи углови троугла су 20%, 35% и 45% збира спољашњих углова. Одреди угао између симетрале најмањег угла и најкраће странице.

532. Круг је подељен на осам исечака (види слику). У сваки исечак упиши троцифрени број који се записује само цифрама 1 и 2, тако да се записи два броја у суседним исечцима (са заједничким полупречником) разликују само у једној цифри (разлика тих бројева је 1, 10 или 100).

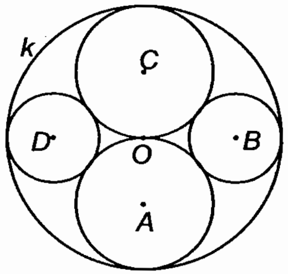
533. Колико најмање сабирака може да буде у изразу да би важило

$$BROJ + BROJ + \cdots + BROJ = AAAAAA.$$

534. Конструиши четвороугао $ABCD$ ако је $AB = 5\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $CD = 7\,\text{cm}$, $DA = 3\,\text{cm}$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$.



Сл. уз зад. 532



Сл. уз зад. 537

VII разред

535. На квадрату је уочено 9 тачака: 4 тачке су темена квадрата, 4 тачке су средишта страница и једна тачка је пресек дијагонала квадрата. Колико троуглова је одређено са ових 9 тачака?

536. Одреди целе бројеве x и y такве да је $x^2y = y^3 + 10$.

537. У кружницу $k(O, 6\,\text{cm})$ уписане су две веће кружнице које се додирују у тачки O и додирују кружницу k и две мање кружнице које додирују две веће кружнице и кружницу k (види слику). Одреди површину четвороугла $ABCD$ аија су темена центри уписаних кружница.

538. У спољашњости једнакостраничног троугла ABC дата је тачка M, таква да је $\measuredangle CMA = 30°$ и $\measuredangle BMA = 45°$. Одреди величину угла ABM.

539. Да ли постоји природан број n такав да важи
$(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)$?

VIII разред

540. За које x израз $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмању вредност? Образложи одговор.

541. Пресек коцке и равни је петоугао. Докажи да је површина тог петоугла мања од производа две његове најдуже странице.

542. Докажи да не постоје цели бројеви x, y и z такви да је $x^4 + y^4 = z^4 + 3$.

543. Јанко је уочио скуп свих 2011-цифрених природних бројева који се записују помоћу две тројке, једне двојке, а остале цифре су јединице. Колико у том скупу има бројева који су дељиви са 99?

544. Дат је круг K_1. Тетиве AM и BN тог круга секу се у тачки P. Нека је O средиште лука MN. Ако је $ON = OP = OM$, докажи да је P ортоцентар троугла ABO.

ПЕТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

545. Тетрамино је многоугао површине 4 чије су све странице целобројне дужине и сваке две странице су узајамно нормалне. (Такав многоугао може се саставити од четири јединична квадрата при чему сваки квадрат има заједничку страницу са бар једним од остала три квадрата.) Два тетрамина сматрамо различитим ако се један из другог не могу добити симетријом и/или ротацијом.

а) Колико има различитих тетрамина?

б) Да ли је могуће покрити без преклапања правоугаоник 4×7 тетраминима тако да се сваки тетрамино употреби бар једнапут?

546. Означимо са $p(n)$ производ свих цифара броја n. Израчунај вредност збира

$$p(1001) + p(1002) + p(1003) + \cdots + p(2011).$$

547. У правоуглом троуглу ABC ($BC > AC$) на катетама BC и CA, редом, означене су тачке M и N такве да је $BM = AC$ и $AN = CM$. Одреди угао између правих BN и AM.

548. Одреди најмању вредност израза

$$S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{abc}}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c са особином $a + b + c = 1$.

ПЕТНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Ларнака (Кипар), 2011.

549. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати неједнакост

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geqslant$$
$$\geqslant 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

550. Наћи све просте бројеве p за које постоје природни бројеви x и y који задовољавају једнакост $x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p$.

551. Нека је $n > 3$ природан број. Једнакостранични троугао ABC је подељен на n^2 подударних „малих“ једнакостраничних троуглова помоћу правих паралелних његовим страницама. Нека је m број ромбова састављених од два „мала“ троугла, а d број ромбова састављених од 8 „малих“ троуглова. Израчунати разлику $m-d$ у зависност од броја n.

552. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао и нека су E и F тачке на страницама AB и CD, редом, тако да је $AB : AE = CD : DF = n$. Ако је S површина четвороугла $AEFD$, доказати да важи

$$S \leqslant \frac{AB\cdot CD + n(n-1)DA^2 + n\,DA\cdot BC}{2n^2}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

2007. година

1. а) 693; б) 541; в) 200.

2. $8\cdot 7+8:2=56+4=60$.

3. Постоје три решења: III+V+VI = XIV, II+VI+VI = XIV, II+V+VII = XIV.

4. а) $555+222=522+255=552+225+525+252=777$.
б) $555-222=255-222=33$.

5. Софија је замислила број 522, јер је $600-148+70=452+70=522$.

6. Резултат је 2 450 444.

7. За 8 година.

8. Како је $2007:3=669$, а $2007:9=223$, следи да су странице сваког од тих правоугаоника дужине 669 cm и 223 cm. Према томе, обим једног од њих је 1784 cm.

9. Нека је x број ученика које треба преместити из прве у другу школу. Након премештања тих ученика у другој школи би било $946+x$ ученика, што значи да их је пре премештања у првој школи било $946+2x$. Следи да је $2x=512$, тј. $x=256$.

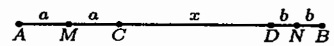
10. Број a је тим већи што су остала два сабирка мања. Због тога, највећа вредност броја a је 7999 када су остала два броја 1000 и 1001.

11. Како је $4536=2^3\cdot 3^4\cdot 7$, а $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=2^3\cdot 3^4\cdot 7\cdot 80$, то је тражени количник 80.

12. Нека је мера мањег угла α. Како је $2007'=33°27'$, следи да је мера већег угла $\alpha+33°27'$. Користећи услов комплементности добијамо да је $2\alpha+33°27'=90°$, па је $2\alpha=56°33'$. Следи да је мера мањег угла $28°16'30''$, а мера већег угла $61°43'30''$.

13. Да би број био дељив са 15 он мора бити дељив и са 3 и са 5. Како је број дељив са 5 ако му је цифра јединица 0 или 5, а дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3, тражени бројеви су: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155 и 7155.

14. Нека је распоред тачака A, B, C и D као на слици. Средишта дужи AC и DB означимо са M и N, а дужине дужи MC, CD и DN обележимо редом са a, x и b. Тада су и дужине дужи AM и NB редом a и b. Према условима задатка следи да је $2a+x+2b=60$ cm, а $a+x+b=45$ cm. Одатле је $a+b=15$ cm, а $x=30$ cm.



Сл. уз зад. 14

15. Унија скупова A и B садржи 17 елемената, а пресек 5 елемената, тако да ће сваки од скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$ садржати по 6 елемената и то $A \setminus B = \{10, 11, 12, 14, 15, 16\}$, а $B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Према томе, $A = \{1, 2, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17\}$.

16. Вредност израза је -9.

17. Прва неједначина је еквивалентна са неједначином $x \geqslant -6$, а друга са $x < -3$. Према томе, заједничка целобројна решења датих неједначина су -6, -5 и -4, а збир тих решења је -15.

18. Углови AMP и MBN, односно MAP и BMN су једнаки као углови са паралелним крацима. Такође је $AM = MB$ јер је M средиште дужи AB. На основу другог става подударности (УСУ) следи да су троуглови AMP и MBN подударни.

19. Како је $a = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2005-2006) = (-1)\cdot 1003 = -1003$, а $b = (1-3)+(5-7)+(9-11)+\cdots+(2005-2007) = (-2)\cdot 502 = -1004$, то је $a > b$.

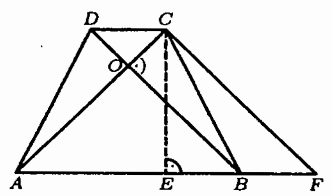
20. Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада важи да је и $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle BDE = \alpha$ јер су троуглови ABC и BDE једнакокраки. Како је збир унутрашњих углова у четвороуглу $ABDF$ једнак $360°$, то је $3\alpha + 144° = 360°$, односно $\alpha = 72°$. Следи да су и у троуглу ABC и у троуглу BDE мере углова $72°$, $72°$ и $36°$.

21. Дата једначина еквивалентна је једначини $3^8 + 3^8 - 5\cdot 3^8 = x\cdot 3^8$. Следи да је $x = -3$.

22. Како је $-5\sqrt{2} = -\sqrt{50}$, $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, $-3\sqrt{5} = -\sqrt{45}$ и $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, то је распоред датих бројева од већег ка мањем следећи: $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $-3\sqrt{5}$, $-5\sqrt{2}$.

23. У троуглу ABC важи да је $AB^2 + BC^2 = AC^2$, па је $\alpha = 90°$. У троуглу ACD дужина катете AD једнака је половини дужине хипотенузе. Следи да је наспрам те катете угао од $30°$, тј. $\beta = 30°$. Према томе, $\alpha + \beta = 120°$.

24. Како је $45^{10} = 3^{10}\cdot 15^{10} = 9^5\cdot 15^{10}$ и $15^{15} = 15^5\cdot 15^{10}$, то је 15^{15} већи број од броја 45^{10}.



Сл. уз зад. 25

25. Нека је O пресек дијагонала датог трапеза, CE висина, а F тачка у којој права кроз C паралелна дијагонали BD сече праву којој припадају тачке A и B. Четвороугао $BFCD$ је паралелограм, па је $BF = DC$ и $FC = BD$. Код једнакокраког трапеза дужине дијагонала су једнаке, па је троугао ACF једнакокрак.

Како су ACF и AOB углови са паралелним крацима, они су једнаки, па је троугао ACF и правоугли. Следи да је $AF = 2\cdot CE = 10\,\text{cm}$.. Како је $AB + CD = AB + BF = AF$, то је $AB + CD = 10\,\text{cm}$. Површина трапеза $ABCD$ једнака је $\dfrac{AB+CD}{2}\cdot CE$, тј. $25\,\text{cm}^2$.

26. Нека је дужина правоугаоника a, а ширина b. Тада је дужина новог правоугаоника $(1+\frac{p}{100})a$, а ширина $(1-\frac{p}{100})b$. Како је површина новог правоугаоника мања за 16% у односу на површину првобитног правоугаоника, добијамо да је $(1+\frac{p}{100})a\cdot(1-\frac{p}{100})b = 0,84\cdot ab$. Одатле следи да је $1-(\frac{p}{100})^2 = 0,84$, тј. $p = 40$.

27. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $x\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-1) \geqslant -\frac{2}{3}$, тј. неједначини $x\cdot(-\frac{2}{3}) \geqslant -\frac{2}{3}$. Следи да је $x \leqslant 1$, па $x \in (-\infty, 1]$.

28. Обележимо са F тачку пресека дужи AE и BC. Површине троуглова AFC, ABF, ADB, FBE и BDE су једнаке јер ови троуглови имају једнаку по једну страницу и одговарајућу висину. Следи да је површина троугла ADE два пута већа од површине троугла ABC и износи $64\,\text{cm}^2$.

29. Јасно је да је $x \neq 0$ јер именилац разломка не може бити 0. Ако је $x < 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x - x = \frac{x}{-x}$, тј. $0 = -1$, па у овом случају нема решења. Ако је $x > 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x + x = \frac{x}{x}$, односно $x = \frac{1}{2}$, па је то и решење полазне једначине.

30. Дате праве одређују једну раван. Уколико дате тачке не припадају истој правој, оне такође одређују једну раван. Свака права са сваком тачком одређује по једну раван, што значи још највише 6 равни. Укупно то је највише 8 равни.

31. а) $438 + 163 = 601$; б) $908 - 159 = 749$; в) $60 : 5 + 5\cdot 3 = 27$; г) $85 + 15 : 5 = 88$.

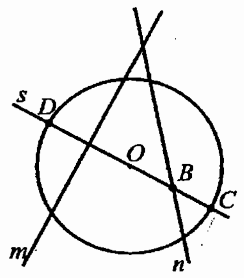
32. В. слику на следећој страни. г) Дуж OC је полупречник круга.

33. Симонидина мајка ће за три године имати 30 година, а Симонида 10. Симонида сада има $10 - 3 = 7$ година.

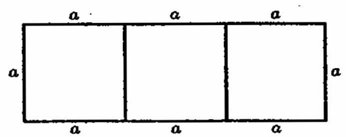
34. а) Пренос утакмице је трајао 1 час и 45 минута.

б) Како је емисија о рибама трајала 55 минута, то је пренос трајао дуже 50 минута.

35. Највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 је 930, а најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21 је 399. Разлика ових бројева је $930 - 399 = 531$.



Сл. уз зад. 32



Сл. уз зад. 38

36. а) Највећи могући такав број је 6644322. б) Најмањи могући такав број је 6364422.

37. Може. То се дешава када једна свешчица има 40 страница, а осталих пет свешчица по 44 странице.

38. Ако дужину странице квадрата обележимо са a, онда је обим квадрата $4a$, а обим правоугаоника је $8a$, слика. Према томе, обим правоугаоника је два пута већи од обима једног од квадрата.

39. Љиља и Биља заједно имају 62 динара више од Маше и Таше заједно. Како Љиља има 70 динара више од Маше, то Таша има 8 динара више од Биље.

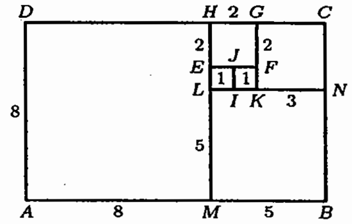
40. Има их једнако, по десет. То су: 112, 121, 211, 220, 202, 130, 103, 310, 301 и 400, односно 1114, 1141, 1411, 4111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211.

41. То су: 147, 174, 417, 471, 714 и 741.

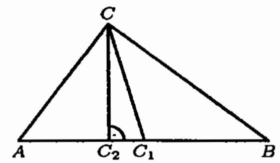
42. Како је $(3x^\circ + 1^\circ) + (x^\circ + 7^\circ) = 180^\circ$, то је $4x^\circ = 172^\circ$, односно $x = 43$. Следи да су на слици углови од 130° и 50°.

43. Како енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, то остатак, односно $\frac{1}{5}$ свих ученика учи само француски. Број ученика који уче оба језика добијамо када од броја свих који уче француски одузмемо број оних који уче само тај језик. Како је $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$, следи да $\frac{11}{20}$ свих ученика учи оба језика.

44. Обележимо сва темена свих квадрата, као на слици. Обим квадрата $EFGH$ је 8 cm, па је дужина његове странице 2 cm. Квадрати $LIJE$ и $IKFJ$ имају странице једнаке дужине, по 1 cm. Даље, дужина странице квадрата $KNCG$ је 3 cm, дужина странице квадрата $MBNL$ је 5 cm, а дужина странице квадрата $AMHD$ је 8 cm. Према томе, дужине страница правоугаоника $ABCD$ су 13 cm и 8 cm, па је његова површина 104 cm^2.



Сл. уз зад. 44



Сл. уз зад. 52

45. Из једнакости $\frac{2}{9} = \frac{2\cdot 223}{9\cdot 223} = \frac{446}{2007}$ следи да је $\frac{2}{9} < \frac{447}{2007}$. Како је $\frac{447}{2007} = \frac{149}{669}$ и $\frac{149}{669} < \frac{150}{669} < \frac{150}{666}$ и $\frac{150}{666} = \frac{25}{111}$, то је $\frac{447}{2007} < \frac{25}{111}$. Решење је: $\frac{2}{9}, \frac{447}{2007}, \frac{25}{111}$.

46. Дата неједначина је еквивалентна са $-6 < x - 1 < 6$, односно са $-5 < x < 7$. Према томе, целобројна решења неједначине су $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и 6, а њихов збир је 11.

47. Из чињенице да се симетрале углова BAC и ABC секу под углом од 124° следи да је $\frac{1}{2}\cdot\measuredangle BAC + \frac{1}{2}\cdot\measuredangle ABC + 124^\circ = 180^\circ$. Одатле добијамо да је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 112^\circ$, па је $\measuredangle ACB = 68^\circ$.

48. Нека је на почетку у кеси било x кликера. Аца је додао $x+1$ кликер, што значи да је након тога у кеси било $2x+1$ кликера. Затим је Веса додао $2(2x+1)+3$ кликера, тј. $4x+5$ кликера, што значи да је након тога у кеси било $6x+6$ кликера. Последњи је пришао Веса и додао $3(6x+6)+5$ кликера, односно $18x+23$ кликера. Према томе, на крају је у кеси било $24x+29$ кликера. Како је $24x+29 = 149$, то је $x = 5$.

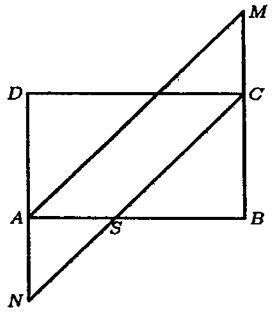
49. Троугао CBE је једнакокрако правоугли, па је $BC = EB$. Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада је $\measuredangle BCA = 90^\circ - \alpha$. Како је $\measuredangle ABC + 90^\circ + \measuredangle EBD = 180^\circ$, то је $\measuredangle EBD = 90^\circ - \measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle EBD = 90^\circ - \alpha$. Одатле добијамо да је $\measuredangle DEB = \alpha$. На основу свега овога следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DEB$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle EBD$. На основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle ABC \cong \triangle DEB$.

50. Распоредимо ученике у 366 група, при чему истој групи припадају они ученици који славе рођендан истог датума. Како је $800 = 366\cdot 2 + 68$, бар једна група садржи бар 3 ученика. Они имају рођендан истог датума.

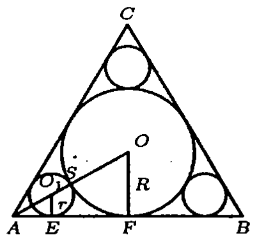
51. $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2} - (\sqrt{5}-5) = |\sqrt{5}-5| - (\sqrt{5}-5) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 5 = 10 - 2\sqrt{5}$.

52. Примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао ABC добијамо да је $AB^2 = AC^2 + BC^2$, па је дужина хипотенузе AB једнака 50 cm (слика на претходној страни). Дужина тежишне дужи која одговара хипотенузи једнака је половини дужине хипотенузе, па је дужина дужи CC_1 једнака 25 cm. Површина правоуглог троугла једнака је половини производа дужина катета, односно половини производа дужина хипотенузе и одговарајуће висине. Одавде добијамо да је дужина дужи CC_2 једнака $\frac{30 \cdot 40}{50}$ cm, тј. 24 cm. Коначно, примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао C_1CC_2 добијамо да је $C_1C_2^2 = C_1C^2 - CC_2^2$, па је дужина дужи C_1C_2 једнака 7 cm.

53. Нека је тачка S пресек дужи AB и CN. Како је $\measuredangle BCS = 45°$, а троуглови BCS и ANS су правоугли, то је $\measuredangle CSB = 45°$ и $\measuredangle ASN = \measuredangle ANS = 45°$ (слика). Следи да су троуглови BCS и ANS и једнакокраки, па је $BS = BC = 3$ cm, а $AN = AS = 2$ cm. Како је и $\measuredangle BAM = 45°$, он је једнак са $\measuredangle BSC$, па је $NC \parallel AM$. Такође је $NA \parallel CM$, па је четвороугао $ANCM$ паралелограм. Његова површина је производ дужина странице AN и одговарајуће висине AB, те је према томе једнака 10 cm^2.



Сл. уз зад. 53



Сл. уз зад. 57

54. Број је дељив са 15 ако је дељив и са 5 и са 3. Да би био дељив са 5, тражени број се мора завршавати нулом, а да би био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Због тога се у декадном запису тог броја мора појавити тачно k четворки, где је k број дељив са 3. Како тражимо најмањи природан број са задатом особином, то је $k = 3$. Тражени број је 4440.

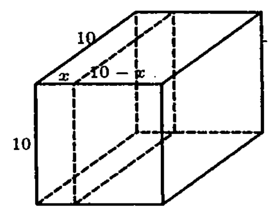
55. Најмањи природан број који се може добити је 1, на пример на следећи начин: $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(2001-2002-2003+2004)-2005+2006$.

56. Решење дате једначине је $x = \frac{8-14k}{3}$. То решење је веће од -2 ако је $\frac{8-14k}{3} > -2$, тј. ако је $k < 1$. Према томе, $k \in (-\infty, 1)$.

57. Нека су тачка O и R центар и дужина полупречника круга k, а тачка O_1 и r центар и дужина полупречника једног од три подударна уписана круга (слика). Нека је, даље, S додирна тачка та два круга, а F и E тачке у којима их страница AB додирује. Како су троуглови AFO и AEO_1 правоугли, а $\measuredangle FAO = 30°$, то је $AO = 2R$ и $AO_1 = 2r$. Следи да је $AS = AO - OS = R$, а такође и $AS = AO_1 + O_1S = 3r$. Према томе, $R = 3r$. Површина круга k је $R^2\pi$, односно $9r^2\pi$, а збир површина три уписана круга је $3r^2\pi$. Тражени однос је $3:1$.

58. Дата неједначина еквивалентна је са $2 - a < x < 2 + a$. Ако је $a \leqslant 1$, број 2 је једино решење неједначине. Ако је $1 < a \leqslant 2$, решења неједначине су 1, 2 и 3. Ако је $a > 2$, неједначина има пет или више решења. Следи да не постоји позитиван реалан број a за који дата неједначина има тачно 4 решења у скупу целих бројева. Према томе, тражени скуп вредности је празан.

59. Нека дата раван дели ивице коцке које сече на делове дужине x и $10 - x$ (у cm), слика. Тада су површине квадара (у cm^2) на које је подељена коцка $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10x$ и $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot (10 - x)$, односно $200 + 40x$ и $600 - 40x$. Однос тих површина је $2:3$, па из једначине $3 \cdot (200 + 40x) = 2 \cdot (600 - 40x)$ добијамо да је $x = 3$. Запремине датих квадара су $3 \cdot 10 \cdot 10$ cm^3 и $7 \cdot 10 \cdot 10$ cm^3. Следи да је однос тих запремина $3:7$.



Сл. уз зад. 59

60. Могуће је да два темена троугла припадају истој страници квадрата или да свако теме троугла припада различитој страници квадрата. У првом случају, на 4 начина бирамо страницу квадрата којој припадају два темена троугла, на 3 начина бирамо две од три тачке са изабране странице и на 9 начина бирамо треће теме троугла од тачака које припадају осталим страницама квадрата. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4 \cdot 3 \cdot 9$ троуглова, тј. 108 троуглова.

У другом случају, на 4 начина бирамо три од четири странице квадрата којима припада по једно теме троугла, а на $3 \cdot 3 \cdot 3$ начина са сваке од изабраних страница квадрата по једну од три дате тачке. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ троуглова, тј. 108 троуглова. Према томе, укупно је датим тачкама одређено 216 троуглова.

61. Има их 15. То су: ABG, BGC, CGF, AGF, AFE, EFD, CFD, CDE, ADE, ACF, ABC, ABF, BCF, ACE и ACD.

62. Могуће је да Воја, Раде и Зоран добију редом кликера: 1, 1, 5 или 1, 2, 4 или 1, 3, 3 или 1, 4, 2 или 1, 5, 1 или 2, 1, 4 или 2, 2, 3 или 2, 3, 2 или 2, 4, 1 или 3, 1, 3 или 3, 2, 2 или 3, 3, 1 или 4, 1, 2 или 4, 2, 1 или 5, 1, 1. То је укупно 15 начина.

63. Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y (све у m). Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$ m дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. Одатле добијамо да је површина стазе (у m^2) $4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 16 + 2 \cdot 2 \cdot y$. Према томе, $80 + 4 \cdot y = 176$, па је $y = 24$.

64. Да је и број фазана и број јаребица порастао 3 пута, било би их укупно $3 \cdot 565$, односно 1695. Како је број јаребица порастао 5 пута, а не 3 пута, то разлика $2007 - 1695$ представља 2 пута увећан почетни број јаребица. Према томе, на почетку је у шуми било 156 јаребица и 409 фазана.

65. Како је Б различито од Л и разлика између Б и Л не може бити већа од 1, то је Б $= 6$. Због преношења 1 при сабирању са цифре јединица хиљада на цифру десетица хиљада, добијамо да је О $= 9$ и А $= 0$. Како нема преношења при сабирању са цифре десетица на цифру стотина, то је 2В $= 10 +$ Ј, па је В $= 7$ или В $= 8$. Не може бити В $= 8$ јер би било Ј $= 6$, а та цифра је већ искоришћена. Према томе, В $= 7$, Ј $= 4$. Како је К $+$ Ц $= 10$ и У $+ 1 =$ К, то користећи преостале цифре добијамо да је К $= 2$, Ц $= 8$ и У $= 1$. Након замене дата једнакост гласи: $712 + 59708 = 60420$.

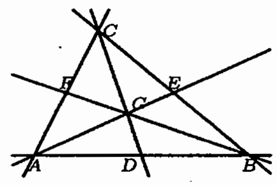
66. Како је $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, то је $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. Заменом ових вредности у једнакост $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$.

67. Како је $10\,\text{m} = 100\,\text{dm}$, то је укупно исечено 1 000 000 коцкица. Да би се поплочала стаза ширине 1 m потребно је поређати једну поред друге 10 коцкица. То значи да је по дужини поређано једна поред друге 100 000 коцкица. Та стаза је дугачка 100 000 dm, односно 10 km. Пешак би ту стазу прешао за 2 сата.

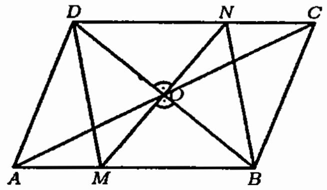
68. Бројеви $2p$, $4r$ и 2006 су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. Следи да је $2p + 4r = 2000$, односно $p + 2r = 1000$. Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, па је $p = 2$. Следи да је $r = 499$. Након провере да је 499 прост број закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = 2$, $q = 2$, $r = 499$.

69. Остаци при дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n су редом 1 и 2, па следи да n дели бројеве 286 и 429. Како је $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, а $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, то је могуће да је $n = 11$ или $n = 13$ или $n = 143$. Провером утврђујемо да се при дељењу броја 231 бројем $n + 1$ добија остатак 3 једино за $n = 11$.

70. Једно решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 70



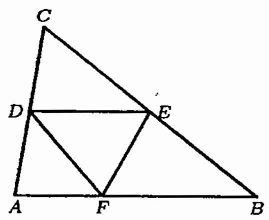
Сл. уз зад. 72

71. Из друге једнакости добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$.

72. Углови OBM и ODN су углови са паралелним крацима, па су једнаки (слика). Тачка O је средиште дијагонале BD, па је $OB = OD$. Како је још $\angle BOM = \angle DON = 90°$, то је по другом ставу подударности троуглова (УСУ) $\triangle MBO \cong \triangle NDO$. Следи да је $MB = ND$. Ове дужи су и паралелне, па следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм. Његове дијагонале су међусобно нормалне, па је он ромб.

73. Прости бројеви већи од 3 су непарни, па су a и b непарни бројеви. Њихов збир $a+b$ и њихова разлика $a-b$ су парни бројеви, па је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 4. При дељењу са 3 бројеви a и b могу имати остатак 1 или 2. Ако имају исти остатак, онда је разлика $a - b$ дељива са 3, а ако имају различит остатак, онда је збир $a+b$ дељив са 3. У сваком случају производ $(a+b)\cdot(a-b)$ је дељив са 3. Како је дељив и са 3 и са 4, дељив је са 12.

74. Нека је F тачка пресека симетрала углова ADE и BED (слика). Како је DE средња линија троугла ABC, то је она паралелна са страницом AB. Одатле следи да је $\angle FDE = \angle AFD$, па је $\angle AFD = \angle ADF$. Троугао AFD је једнакокрак, па је $AF = AD$. Тачка D је средиште странице AC, па је $AF = \frac{AC}{2}$. Аналогно добијамо да је $BF = \frac{BC}{2}$. Следи да је $AB = \frac{AC + BC}{2}$.

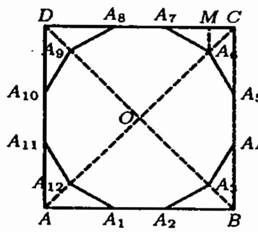


Сл. уз зад. 74

75. Нека је a дужина основице, а b дужина крака (све у cm) троугла који испуњава услове задатка. Како је $a + 2b$ непаран број, то је a непаран број. Збир дужина две странице у троуглу је већи од дужине треће странице, па мора бити $a < 2b$. Како је $a + 2b = 2005$, то је $a < 1003$, па a може бити било који елемент скупа $\{1, 3, \ldots, 1001\}$. Према томе, број троуглова који испуњавају услове задатка је 501.

76. Из $\sqrt{17} > 4$ и $\sqrt{37} > 6$ следи $\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}} > \sqrt{10}$. Како је $\sqrt{10} > 3$ и $\sqrt{2} > 1$, то је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > \sqrt{5+3+1}$, па следи тражена неједнакост.

77. Обележимо темена дванаестоугла словима $A_1, A_2, \ldots A_{12}$, а темена квадрата словима A, B, C и D (као на слици). Нека је дужина странице дванаестоугла једнака x (у cm). Обележимо са M подножје нормале из A_6 на страницу квадрата CD. У правоуглом троуглу A_6MA_7 угао A_6A_7M једнак је 30° као спољашњи угао правилног дванаестоугла. Због тога је $A_6M = \frac{x}{2}$, а $A_7M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Троугао A_6CM је једнакокрако правоугли, па је $MC = \frac{x}{2}$. Како је $A_8D = A_7C$, то је $CD = x + 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2})$. Следи да је $x\cdot(2+\sqrt{3}) = 10$, па је $x = 10\cdot(2-\sqrt{3})$.



Сл. уз зад. 77

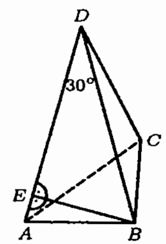
78. Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. Следи да је $3^{2007} > 3^7\cdot 2^{3000}$, па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7-1)\cdot 2^{3000}$. Како је $3^7 - 1 > 2007$, то је $(3^7-1)\cdot 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$. Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$.

79. Претпоставимо да постоји такав троугао. Ако са P означимо његову површину (у cm^2), онда користећи формулу за површину троугла добијамо да су дужине страница (у cm) тог троугла $\frac{2P}{1}$, $\frac{2P}{2}$ и $\frac{2P}{3}$. Како је $\frac{2P}{1} > \frac{2P}{2} + \frac{2P}{3}$, то је дужина једне странице тог троугла већа од збира дужина друге две странице. То је немогуће, па следи да такав троугао не постоји.

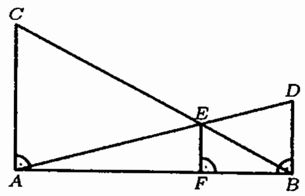
80. Такви четвороцифрени бројеви могу да буду записани са две цифре које се појављују по два пута или са три цифре од којих се једна појављује два пута, а остале две по једном. У првом случају, на три начина бирамо које две цифре се појављују по два пута у запису броја. Нека су то на пример неке цифре a и b. Бројеви записани помоћу њих су: *aabb*, *abab*, *abba*, *baba*, *baab* и *bbaa*. Према томе, у том случају има $3\cdot 6$, односно 18 бројева. У другом случају, на три начина бирамо цифру која се у запису броја појављује два пута, на четири начина бирамо место на коме је једна од цифара које се у том запису појављују једном, а на три начина бирамо место на коме је друга од цифара које се у том запису појављују једном. У том случају има $3\cdot 4\cdot 3$, односно 36 бројева. Укупно има 54 броја са датом особином.

81. Како је $2007^{2005} - 2007 = 2007\cdot(2007^{2004}-1) = 9\cdot 223\cdot(2007^{2004}-1)$, то је дати број дељив са 9. Број 2007^4 се завршава цифром 1, па следи да се и број 2007^{2004} завршава цифром 1. Због тога је $2007^{2004}-1$ дељив са 10, па је и $2007^{2005} - 2007$ дељив са 10. Како је дати број дељив и са 9 и са 10, он је дељив са 90.

82. Обележимо темена основе пирамиде са A, B и C, а врх са D (слика). Нека је тачка E подножје висине из темена B бочне стране ABD. У правоуглом троуглу EBD угао EDB једнак је 30°, па је дужина катете BE једнака половини дужине хипотенузе BD и износи 4 cm. Површина бочне стране пирамиде је $16\,\mathrm{cm}^2$. Примењујући Питагорину теорему на троугао EBD добијамо да је дужина дужи ED једнака $4\sqrt{3}$ cm. Онда је дужина дужи AE једнака $8-4\sqrt{3}$ cm. Примењујући Питагорину теорему на троугао ABE добијамо да је дужина основне ивице AB дате пирамиде једнака $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. Основа пирамиде је једнакостранични троугао, па је површина те основе једнака $\frac{(8\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$, тј. $32\sqrt{3} - 48\,\mathrm{cm}^2$. Површина пирамиде је $32\sqrt{3} - 48\,\mathrm{cm}^2 + 3\cdot 16\,\mathrm{cm}^2$, односно $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 82



Сл. уз зад. 84

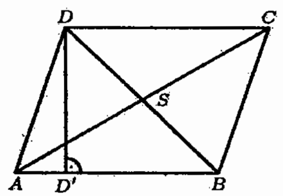
83. Како је $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2004\cdot 2006 = (2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+(4-1)\cdot(4+1)+\cdots+(2005-1)\cdot(2005+1) = 2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2005^2-1 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-2005$, то је тражена разлика једнака 2005.

84. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на дуж AB. Троуглови AFE и ABD су правоугли и имају заједнички угао FAE, па су слични. Следи да је $FE : BD = AF : AB$. Троуглови FBE и ABC су правоугли и имају заједнички угао FBE, па су и они слични. Следи да је $FE : AC = FB : AB$. Из ових једнакости добијамо да је $\frac{FE}{BD} + \frac{FE}{AC} = \frac{AF+FB}{AB}$, односно $FE\cdot(\frac{1}{BD}+\frac{1}{AC}) = 1$. Према томе, дужина дужи FE, а самим тим и тражено растојање је 2 cm.

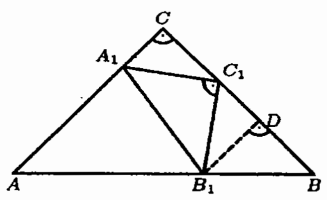
85. Цифру десетица хиљада петоцифреног броја са датим својством можемо изабрати на 5 начина, цифру јединица хиљада на 4 начина, цифру стотина на 3 начина, цифру десетица на 2 начина и цифру јединица на 1 начин, одакле следи да таквих петоцифрених бројева има 120. Како су код сваког од њих све цифре различите, то се у запису свих 120 бројева свака од цифара 1, 2, 3, 4 и 5 појављује по 120 пута, и то по 24 пута на сваком месту у запису петоцифреног броја. Следи да је збир свих петоцифрених бројева са датим својством једнак $(1+2+3+4+5)\cdot 24\cdot(10000+1000+100+10+1)$, тј. 3999960.

86. Број који је дељив и са 5 и са 7 и са 11, дељив је са 385. Како при дељењу броја 7002000 бројем 385 добијамо количник 18187 и остатак 5, то ће тражени седмоцифрени бројеви бити $385\cdot 18188$ и $385\cdot 18189$, односно 7002380 и 7002765.

87. Ако је S тачка пресека дијагонала, онда је S средиште сваке од дијагонала, па је $AS = SC = 3\,\mathrm{cm}$. Прво се конструише правоугли троугао BDD'. Након тога, одреди се средиште S дужи BD. Затим се конструише круг са центром у S и полупречником дужине 3 cm. У пресеку круга са правом која садржи тачке B и D' добија се тачка A. Тачка C се добија у пресеку круга и праве која садржи тачке A и S.



Сл. уз зад. 87



Сл. уз зад. 89

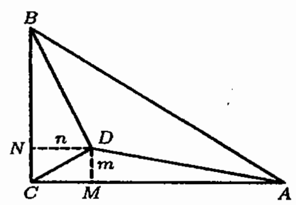
88. На тестирању је учествовало 30 дечака и 270 девојчица. Сви ученици су укупно освојили $300\cdot 84$, односно 25200 бодова, док су девојчице укупно освојиле $270\cdot 83$, односно 22410 бодова. Следи да су дечаци укупно освојили 2790 бодова. Како је учествовало 30 дечака, сваки од њих је освојио по 93 бода.

89. Нека је тачка D подножје нормале из тачке B_1 на страницу BC (слика). Како је $\measuredangle B_1C_1D = 180^\circ - (\measuredangle A_1C_1B_1 + \measuredangle A_1C_1C) = 90^\circ - \measuredangle A_1C_1C = \measuredangle C_1A_1C$ и $\measuredangle C_1DB_1 = \measuredangle A_1CC_1 = 90^\circ$, то је и $\measuredangle C_1B_1D = \measuredangle A_1C_1C$. Како је и $C_1B_1 = A_1C_1$, то на основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle C_1B_1D \cong \triangle A_1C_1C$. Одатле добијамо да је $C_1D = A_1C$ и $DB_1 = CC_1$. Троугао B_1BD је једнакокракоправоугли, па је $DB_1 = DB$. Одатле добијамо да је $DB = CC_1$. Следи да је $CB = 2\cdot CC_1 + C_1D$. Како је $CB = AC = AA_1 + A_1C$ и $A_1C = C_1D$, то је $AA_1 = 2\cdot CC_1$.

90. Прости бројеви се могу завршавати цифром 1, 2, 3, 5, 7 или 9. Како се од простих бројева цифром 2 завршава само број 2, а цифром 5 само број 5, то се бар 2005 од датих простих бројева завршавају неком од цифара 1, 3, 7 или 9. Како имамо бар 2005 бројева, а 4 могућности за цифру којом се завршавају ти бројеви, по Дирихлеовом принципу бар 502 од тих бројева се завршавају истом цифром.

91. Како је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab} = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$, то је вредност датог израза увек константна, па не зависи ни од a ни од b.

92. Нека су тачке M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC (слика). Означимо са a, b, c, m и n дужине (у cm) дужи BC, AC, AB, DM и DN редом. Како су површине троуглова ACD и BCD једнаке четвртини површине троугла ABC, то је $\frac{mb}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{ab}{2}$ и $\frac{na}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{ab}{2}$. Следи да је $m = \frac{a}{4}$ и $n = \frac{b}{4}$. Из правоуглог троугла CMD добијамо да је $m^2 + n^2 = CD^2$, односно $(\frac{a}{4})^2 + (\frac{b}{4})^2 = 25$. Следи да је $a^2 + b^2 = 400$, па је $c^2 = 20^2$. Према томе, дужина хипотенузе AB је 20 cm.



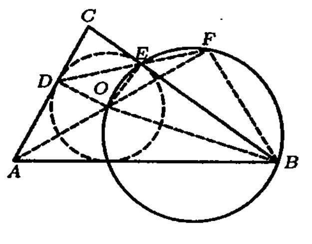
Сл. уз зад. 92

93. Нека је разлика сваког броја и његовог претходника једнака d. Други и трећи број у низу имају исту цифру десетица, па следи да је d једноцифрен број. Како је први број у низу једноцифрен, а други двоцифрен, то је $B = 1$. Даље следи да је $C = 2$ и $F = 3$. Други број у низу је 12, а пети 33. Како је $12 + 3d = 33$, то је $d = 7$. Ћирило је на табли написао бројеве: 5, 12, 19, 26, 33.

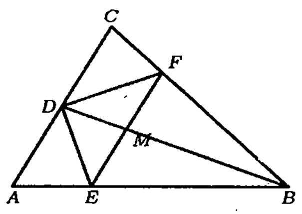
94. Како је $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, то се бројеви облика 2^n редом завршавају цифром 2, 4, 8, 6, 2, … . Слично, бројеви облика 3^{n+3}, односно $27\cdot 3^n$ се редом завршавају цифром 1, 3, 9, 7, 1, … . Због тога се збир $2^n + 3^{n+3}$ завршава или цифром 3 или цифром 7. Како се квадрат природног броја никад не завршава неком од те две цифре, то следи да тражени број n не постоји.

95. Нека је $\measuredangle BAC = \alpha$, а $\measuredangle ABC = \beta$ (слика). Тада је $\measuredangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Дужи CD и CE су тангентне дужи из исте тачке, па су једнаке. Троугао DEC је једнакокрак, па је $\measuredangle CDE = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta)) = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Угао

CDE је спољашњи угао троугла AFD, па је $\angle FAD + \angle AFD = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Како је AO симетрала $\angle BAC$, то је $\angle FAD = \dfrac{\alpha}{2}$, па следи да је $\angle AFD = \dfrac{\beta}{2}$. Полуправа BO је симетрала $\angle ABC$, па је $\angle OBE = \dfrac{\beta}{2}$. Како је $\angle OFE = \angle AFD = \angle OBE$, то се око четвороугла $OBFE$ може описати круг. Углови OEB и OFB су периферијски углови тог круга над истом тетивом OB, па су једнаки. Како је $\angle OEB = 90°$, то је и $\angle AFB = \angle OFB = 90°$.



Сл. уз зад. 95



Сл. уз зад. 97

96. Ако је $|x-2| < 0{,}04$, онда је $1{,}96 < x < 2{,}04$. Тада је $-1{,}1584 < x^2-5 < -0{,}8384$, па је $A = 1{,}1584$.

97. У троуглу ADB дуж DE је симетрала угла ADB, па је $AE : EB = AD : BD$. Слично, у троуглу BCD је $CF : FB = DC : BD$. Како је $AD = DC$, то је $AE : EB = CF : FB$. На основу обрнуте Талесове теореме добијамо да је $AC \parallel EF$. Следи да је $\triangle ADB \sim \triangle EMB$ и $\triangle DBC \sim \triangle MBF$. Одатле је $AD : EM = DB : MB$ и $DC : MF = DB : MB$. Према томе, $AD : EM = DC : MF$, па је $EM = MF$.

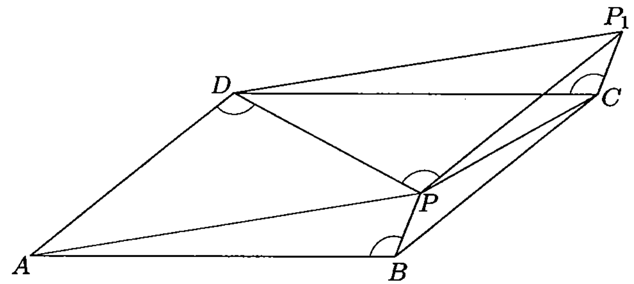
98. За $n = 1$ и $n = 2$ бројеви датог облика су 18 и 45. Њихов највећи заједнички делилац је 9, па следи да највећи заједнички делилац свих бројева датог облика може бити или 1 или 3 или 9. Како је $4^1 \equiv 4 \pmod 9$, $4^2 \equiv 7 \pmod 9$, $4^3 \equiv 1 \pmod 9$, то закључујемо да је $4^{3k+l} \equiv 4^l \pmod 9$, где $k \in \mathbf{N}$, а $l \in \{0,1,2\}$. Сваки природан број већи од 2 може се представити у облику $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, где је k природан број. Ако је $n = 3k$, онда је $4^{3k} + 15\cdot 3k - 1 \equiv 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+1$, онда је $4^{3k+1} + 15\cdot(3k+1) - 1 \equiv 4+6-1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+2$, онда је $4^{3k+2} + 15\cdot(3k+2) - 1 \equiv 7+3-1 \equiv 0 \pmod 9$. У сваком случају, сви бројеви облика $4^n + 15n - 1$ су дељиви са 9, па је управо број 9 њихов највећи заједнички делилац.

99. Обележимо дужине ивица квадра са x, y и z, тако да је $x \leqslant y \leqslant z$. Тада важи да је $2(xy+xz+yz) = 4(x+y+z)$, односно $xy+xz+yz = 2(x+y+z)$.

Како је $xy+xz+yz \geqslant xy+xz+x^2 = x(x+y+z)$, то је $x \leqslant 2$. Ако је $x=1$, онда је $y+z+yz = 2(1+y+z)$, односно $yz-y-z=2$. Одатле је $y(z-1)-(z-1)=3$, па је $(y-1)(z-1)=3$. Како је $y \leqslant z$, то је $y-1=1$ и $z-1=3$, па је $y=2$ и $z=4$. Ако је $x=2$, онда је $2y+2z+yz = 2(2+y+z)$, односно $yz=4$. Како је $2 \leqslant y \leqslant z$, то је $y=2$ и $z=2$. Према томе, решења су $x=1$, $y=2$, $z=4$ и $x=2$, $y=2$, $z=2$.

100. Након првог потеза Раша сигурно даје Гаши део чоколаде правоугаоног облика. Гаша треба да пресече чоколаду тако да део који да Раши буде квадратног облика. Раша је опет принуђен да након свог потеза да Гаши део правоугаоног облика, итд. Према томе, Гаша никад неће добити део чоколаде квадратног облика, а он увек даје Раши део квадратног облика, па ће овом стратегијом Гаша сигурно победити.

101. Конструишимо троугао DCP_1 (слика) тако да је $DP_1 \parallel AP$ и $DP_1 = AP$. Тада је $\triangle ABP \cong \triangle DCP_1$, јер је $AB = DC$, $AP = DP_1$ и $\angle BAP = \angle CDP_1$. Одмах следи да је $\angle DCP_1 = \angle ABP$. Како је $PP_1 \parallel AD$, јер је APP_1D паралелограм, то је $\angle ADP = \angle DPP_1$. Тада је $\angle DPP_1 = \angle DCP_1$, па је четвороугао $DPCP_1$ тетиван. Сада је $\angle DAP = \angle DPP_1 = \angle DCP = 30°$.



Сл. уз зад. 101

102. Направимо произвољну групу од 1003 члана. Једна од 1004 преостале особе познаје све чланове те групе. Нека је то особа x_1. Укључимо особу x_1 у ту групу уместо неке од чланова те групе. Сада међу преостале 1004 особе опет постоји особа, означимо је са x_2 која познаје све чланове те групе. Укључимо и њу у групу уместо једне од особа изузев особе x_1. На овај начин може се формирати група од 1003 особе $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}$ које се све међусобно познају. Сада постоји особа x_{1004} која није у групи и познаје све особе из те групе. У групи $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}, x_{1004}$ сви познају једни друге. Од преостале 1003 особе се може формирати једна група чије ће све чланове познавати нека особа ван те групе, то јест нека од особа $x_1, x_2, \dots, x_{1004}$, рецимо особа x. Та особа x познаје заправо све присутне особе.

103. Нека је

$$A = \frac{2}{(x+1)^2+y^2+1} + \frac{2}{(y+1)^2+z^2+1} + \frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}$$
$$= \frac{2}{x^2+y^2+2x+2} + \frac{2}{y^2+z^2+2y+2} + \frac{2}{z^2+x^2+2z+2}.$$

Како је $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, $y^2+z^2 \geqslant 2yz$ и $z^2+x^2 \geqslant 2zx$, то је

$$A \leqslant \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}.$$

Како је $\dfrac{1}{xy+x+1} \cdot \dfrac{z}{z} = \dfrac{z}{1+xz+z}$ и $\dfrac{1}{yz+y+1} \cdot \dfrac{xz}{zx} = \dfrac{zx}{zx+1+z}$, то је

$$A \leqslant \frac{z}{1+xz+z} + \frac{zx}{zx+1+z} + \frac{1}{zx+z+1} = 1.$$

Једнакост важи за $x^2+y^2 = 2xy$, $y^2+z^2 = 2yz$, $z^2+x^2 = 2xz$, тј. за $x = y$, $y = z$ и $z = x$ односно за $x = y = z$.

104. Почетна позиција дата је на слици 1 ($a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \{-1, 1\}$). Први корак је на слици 2.

a	b	c
d	e	f
g	h	j

Сл. 1 уз зад. 104

bd	aec	bf
aeg	$dbhf$	cej
dh	gej	hf

Сл. 2 уз зад. 104

Други корак је дат на слици 3, тј. (јер је $1^2 = (-1)^2 = 1$ и $x^3 = x$ за $x \in \{-1, 1\}$) на слици 4.

a^2e^2gc	$d^2b^3f^2h$	e^2c^2aj
$b^2d^3h^2f$	$a^2e^4g^2j^2c^2$	$b^2f^3h^2d$
ae^2g^2j	$d^2h^3f^2b$	ge^2j^2c

Сл. 3 уз зад. 104

gc	bh	aj
df	1	fd
aj	bh	gc

Сл. 4 уз зад. 104

Трећи корак је као на слици 5, тј. 6.

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	$(bhdf)^2$	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 5 уз зад. 104

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	1	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 6 уз зад. 104

Последњи, четврти корак, дат је на слици 7, тј. 8.

$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$
$(bhdf)^2$	1	$(bhdf)^2$
$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$

Сл. 7 уз зад. 104

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Сл. 8 уз зад. 104

105. Како је $n!$ за $n \geqslant 9$ дељиво са $3^3 = 27$, то треба проверити дељивост са 3^3 збира $1!+2!+3!+\dots+8!$. Из $1!+2!+3!+\dots+8! = 9+4!\cdot(1+5+5\cdot6)+7!\cdot(1+8)$ добијамо $1!+2!+3!+\dots+8! \equiv 9 \pmod{27}$, па значи за $n \geqslant 8$ број $1!+2!+\dots+n!$ није дељив са $27 = 3^3$ (а дељив је са $9 = 3^2$).

Непосредно се проверава да је $1 \equiv 1 \pmod{27}$, $1+2! \equiv 3 \pmod{27}$, $1+2!+3! \equiv 9 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4! \equiv 6 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5! \equiv 18 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5!+6! \equiv 9 \pmod{27}$. Како је $1+2!+3!+4!+5!+6!+7! = 81\cdot73$, тј. $3^4 \mid (1+2!+3!+4!+5!+6!+7!)$, то је $k = 4$ највећи број за који $3^k \mid (1!+2!+\dots+n!)$ и то за $n = 7$.

106. Како је $AE \leqslant \sqrt{3}$, $BF \leqslant \sqrt{3}$ и $CD \leqslant \sqrt{3}$, то је $h_a \leqslant \sqrt{3}$, $h_b \leqslant \sqrt{3}$ и $h_c \leqslant \sqrt{3}$. Бар један од углова α, β или γ је већи или једнак од $60°$. Нека је рецимо $\alpha \geqslant 60°$.

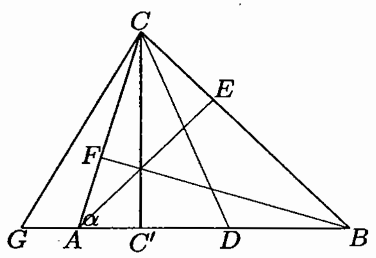
(1) Ако је $\alpha = 60°$, тада је $AC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}h_c \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$, па је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

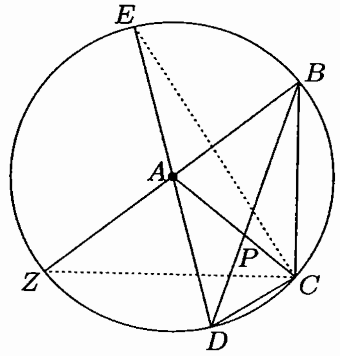
(2) Ако је $\alpha > 60°$, тада на правој AC постоји тачка G таква да је $\measuredangle BGC = 60°$ (слика), па је тада $GC = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqslant h_c \leqslant 2$ и $AC < GC \leqslant 2$. Сада се одмах

добија

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



Сл. уз зад. 106



Сл. уз зад. 108

107. Како је $x^2+ax+a^2-6=(x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(a^2-8)$, то за $a^2>8$ једначина $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решења. Претпоставимо да је $a^2 \leqslant 8$. Тада је $a^3 \leqslant 8a$, јер је $a>0$ по претпоставци. Како је $a^3=6a+b$, то је $6a+6 \leqslant 8a$, односно $a \geqslant 3$ и $a^2 \geqslant 9$, што је контрадикција. Дакле, ни у овом случају дата једначина нема решења.

108. На правим DA и BA изабрати редом тачке E и Z тако да је $AC = AE = AZ$ (слика). Како је $\measuredangle DEC = \frac{\measuredangle DAC}{2} = 18^\circ = \measuredangle CBD$, то је четвороугао $DEBC$ тетиван. Слично, четвороугао $CBZD$ је тетиван, јер је $\measuredangle AZC = \frac{\measuredangle BAC}{2} = 36^\circ = \measuredangle BDC$. Према томе, петоугао $BCDZE$ је уписан у кружницу $k(A, AC)$. Из тога следи да је $AC = AD$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$, што повлачи да је $\measuredangle ADP = 36^\circ$ и $\measuredangle APD = 108^\circ$.

109. Како је $50 = 4 \cdot 12 + 2$, то постоји најмање 13 тачака обојених истом бојом.

Пронађимо максималан број једнакокраких троуглова чија су темена неке три од датих n тачака. Издвајањем неке две од тих n тачака, можемо добити највише 2 једнакокрака троугла којима изабране две тачке одређују основицу. Зато је тражени максималан број једнакокраких троуглова $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$. Када од укупног броја троуглова одузмемо максималан број једнакокраких троуглова, добијамо минималан број разностраничних троуглова, и он износи

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}, \quad n > 8.$$

За $n = 13$ добијамо $\frac{13 \cdot 12 \cdot 5}{6} = 130$, па дакле постоји најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена истом бојом.

110. Претпоставимо супротно од оног што се тврди у задатку, тј. да је p прост број и да је $m = 7p + 3^p - 4$ квадрат целог броја. За $p = 2$ је $m = 19$, а за $p = 3$ је $m = 44$, што нису потпуни квадрати. Претпоставимо зато да је $p > 3$ и нека је $m = n^2$ за неко $n \in \mathbf{Z}$. Искористимо „малу" Фермаову теорему[1] према којој је $3^p \equiv 3 \pmod{p}$, па добијамо да је

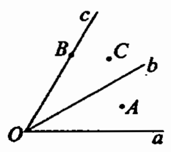
$$m = 7p + 3^p - 4 \equiv 0 + 3 - 4 = -1 \pmod{p}.$$

Ако је $p = 4k+3$, $k \in \mathbf{Z}$, тада је, опет по „малој" Фермаовој теореми, $-1 \equiv m^{2k+1} = n^{4k+2} = n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, што је контрадикција, јер је $p > 3$. Претпоставимо да је $p \equiv 1 \pmod 4$. Тада је $m \equiv 3 - 1 = 2 \pmod 4$, што је опет контрадикција, јер ниједан квадрат природног броја не даје остатак 2 по модулу 4.
Дакле, ни за један прост број p, m није квадрат природног броја.

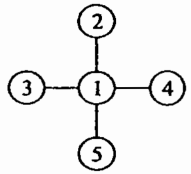
[1] Видети, на пример, В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре 15, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

2008. година

111. а) 798, б) 448, в) 86. **112.** В. слику.



Сл. уз зад. 112



Сл. уз зад. 114

113. $x - 348 = 485$, па је $x = 833$.

114. Збир 8 од бројева 1, 2, 3, 4 и 5 можемо добити на два начина: $1+2+5$ и $1+3+4$. Како је број 1 у оба збира, закључујемо да се он мора наћи и у водоравном и у усправном правцу (слика).

115. а) $39 = 33 + 3 + 3$, б) $33 \cdot 3 \cdot 3 = 297$.

116. а) 5 994, б) 1 570.

117. Највећи паран петоцифрени број написан датим цифрама је 54 312, а највећи непаран четвороцифрени број написан датим цифрама је 9 867. Збир ових бројева је $54312 + 9867 = 64179$.

118. Једна страница правоугаоника је $28\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$, а друга $28\,\text{cm} - 19\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$. Обим троугла је $O = 2a + 2b = 48 + 18 = 64\,\text{cm}$.

119. Најмањи број дељив и са 5 и са 9 је $5 \cdot 9 = 45$, а како је $10 \cdot 45 = 450$, $11 \cdot 45 = 495$, $12 \cdot 45 = 540$, $13 \cdot 45 = 585$, $14 \cdot 45 = 630$, то је тражени број 585.

120. Да би тражени збир био највећи, бројеви које је Ана замислила морају бити највећи могући. Највећи могући четвороцифрени број је 9 999, а како је разлика 9 863, то је троцифрени број 136. Дакле, тражени збир је $9999+136 = 10135$.

121. Најмањи непаран четвороцифрени број је 1 001, а највећи је 9 999. Како је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, а $9999 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101$, то је $D(1001, 9999) = 11$.

2	1	2	4
3	5	1	15
3	3	2	18
8	9	5	

Сл. уз зад. 124

122. Нека је $\alpha > \beta$. Како је $\alpha + \beta = 90°$ и $\beta = \frac{2}{3}\alpha$, то је $\alpha = 54°$ и $\beta = 36°$.

123. У школи ради $((17+20)-5)+3 = 35$ наставника.

124. Једно решење је дато на слици.

125. Бака Мица има 13 пута више меда, 7 пута више уља, 5 пута више шећера и 4 пута више брашна него што је потребно за 25 медењака. Дакле она може да направи 4 пута више медењака (јер брашна има релативно најмање), тј. може да направи 100 медењака.

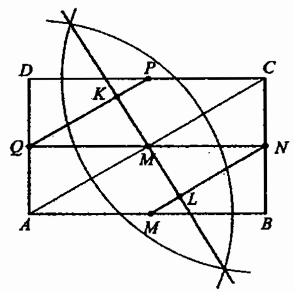
126. $x = -2008$, па је вредност израза 8032.

127. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° - 124° = 56°$, па је $\gamma = 68°$.

128. $7 - 5 < x < 7 + 5$, односно $2 < x < 12$. Ако је $x \in \{3, 4\}$ онда је $\alpha < \beta < \gamma$. Ако је $x = 5$ онда је $\alpha = \beta < \gamma$. Ако је $x = 6$ онда је $\beta < \alpha < \gamma$. Ако је $x = 7$ онда је $\beta < \alpha = \gamma$. Ако је $x \in \{8, 9, 10, 11\}$ онда је $\beta < \gamma < \alpha$.

129. $-\frac{6}{23} < \frac{x}{4} < -\frac{5}{23}$. Доводећи их на исте imениоце имамо $-\frac{24}{92} < \frac{23x}{92} < -\frac{20}{92}$, односно, $-24 < 23x < -20$, па је $x = -1$. Дакле, тражени разломак је $-\frac{1}{4}$.

130. В. слику.



Сл. уз зад. 130

131. Како је $x = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$, то је вредност израза $8x^3 - 4x^2 = 18$.

132. Како је $D_n = \frac{5}{2}n$, то је $n = 8$ и $S_n = 1\,080°$.

133. $x = 2007$.

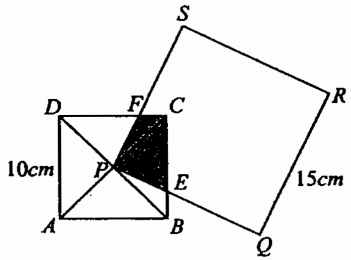
134. Катета мањег правоуглог троугла је 10. Хипотенуза већег правоуглог троугла је 20. $O = 40 + 10\sqrt{2}$. $P = 150$.

135. $a\sqrt{3} + b = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + 3 = |1 - \sqrt{3}| + 3 = \sqrt{3} - 1 + 3 = \sqrt{3} + 2$, па је $a = 1$, $b = 2$.

136. Решење прве једначине је $x = \frac{3}{10}$, па заменом вредности за x у другој једначини добијамо $k = \frac{9}{5}$.

137. Површина призме је $P = 10B$. Висина призме је $H = 2\sqrt{B}$, па је $V = B \cdot H = 2B\sqrt{B}$.

138. $y < -\dfrac{12}{11}$.



Сл. уз зад. 140

139. Три тачке одређују највише 1 раван, а три паралелне праве највише 3 равни. Свака тачка и свака права одређују највише једну раван, а укупно $3 \cdot 3 = 9$ равни. Према томе, на овим елементима, највише је одређено $1 + 3 + 9 = 13$ равни.

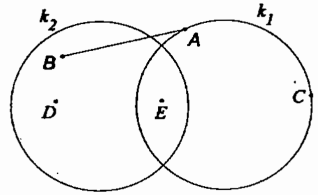
140. $\Delta PCF \cong \Delta PBE$ (УСУ), па је површина осенченог дела једнака четвртини површине квадрата, односно $25\,\mathrm{cm}^2$.

141. а) 54, б) 52, в) 180, г) 18.

142. Како је $*+7 = 20$, то је непознати број 13. Резултат који је Ана требало да добије је $13 \cdot 7 = 91$.

143. Крушку је могао да засади или Влада или Јова. Како то није урадио Влада, онда је крушку засадио Јова. Ако Влада није засадио крушку, а вишњу није могао по претпоставци, онда је засадио јабуку. Дакле, вишњу је засадио Коста.

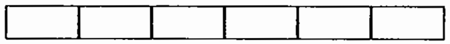
144.

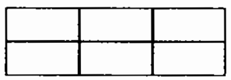


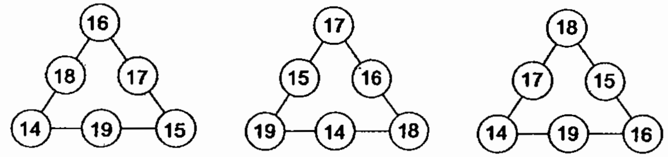
Сл. уз зад. 144

145. Има више решења, а три карактеристична су дата на слици.

146. $1 + 2 + 345 \cdot 6 - 7 \cdot 8 - 9 = 2008$.

147. а)  $O = 2\cdot2+12\cdot3 = 40\,\mathrm{cm}$.

б)  $O = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 145

148.

год. рођења	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
збир цифара	3	4	5	6	7	8	9
год. девојчице	7	6	5	4	3	2	1

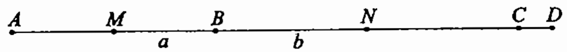
Девојчица је рођена 2003. године.

149. Марко је 100 бомбона купио за $(100 : 5)\cdot 2 = 40$ динара, а за њих је добио $(100 : 2) \cdot 1 = 50$ динара. Дакле, Марко је зарадио 10 динара.

150. Како у три корпе има укупно $12 + 14 + 22 = 48$ јабука, то значи да ће у свакој корпи после тражена 3 пребацивања бити по 16 јабука. За показана 3 пребацивања ученик добија:

I корпа	II корпа	III корпа	Начин пребацивања
12	14	22	Почетне количине
12	28	8	из III у II
24	16	8	из II у I
16	16	16	из I у III

151. Број $9 \cdot 9 = 81$ завршава се цифром 1. Број $9 \cdot 9 \cdot 9$ завршава се цифром 9, а број $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ цифром 1, итд. Дакле, сви производи са непарним бројем деветки завршавају се цифром 9, а са парним бројем деветки цифром 1. То значи да се тражени производ завршава цифром 9.



Сл. уз зад. 152

152. Означимо $MB = a$ и $BN = b$. Сада је $MN = a + b = 1{,}5\,\mathrm{dm} = 15\,\mathrm{cm}$. Како је $AB = 2a$ и $BC = 2b$, то је $AC = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 30\,\mathrm{cm}$. Дакле, $CD = AD - AC = 2\,\mathrm{cm}$.

153. Пуж A прелази дужину од 1 m за 10 минута и притом се одмара $4 \cdot 1{,}5 = 6$ минута. Дакле, пуж A ће на циљ стићи за 16 минута. Пуж B прелази дужину од 1 m за $5 \cdot 3 = 15$ минута и притом се одмара $4 \cdot 0{,}5 = 2$ минута. Дакле, пуж B ће стићи на циљ за 17 минута. Пуж A стиже први на циљ.

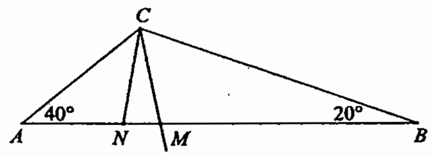
154. Са непарне стране је употребљено $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 5 + 90 + 105 = 200$ цифара, а са парне стране $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 4 + 90 + 24 = 118$ цифара. Дакле за нумерацију свих кућа у тој улици, употребљено је 318 цифара.

155. Из $\alpha + \beta = 180°$ и $\frac{2}{5}\alpha + \beta = 90°$, одмах видимо да је $\frac{3}{5}\alpha = 90°$, тј. $\alpha = 150°$ и $\beta = 30°$. Сада је $\alpha - \beta = 120°$.

156. $x = -2$ и $y = -3$. Сада је $|x-1| - |y-2| = -2$.

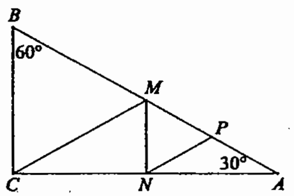
157. Ако тај број означимо са x онда је $x - 9 = -603$, односно $x = -594$. Милован би добио $-594 : 9 = -66$.

158. Нека је $N \in AB$ и $BN = BC$. $\triangle BCN$ је једнакокрак, па је $\measuredangle BNC = 80°$. CM је симетрала $\measuredangle ACB$, па је $\measuredangle ACM = 60°$, а одатле је $\measuredangle AMC = 80°$. Дакле, $\triangle NCM$ је једнакокрак и $NC = CM$. Угао BNC је спољашњи угао $\triangle ANC$, одакле је $\measuredangle ACN = \measuredangle BNC - \measuredangle CAN = 40°$. Дакле, $\triangle ANC$ је једнакокрак па је $AN = NC$. Значи $CM = CN = AN = AB - BN = AB - BC = 10\,\text{cm}$.

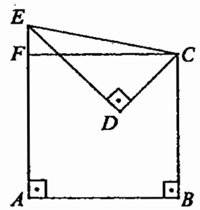


Сл. уз зад. 158

159. Одмах закључујемо да је $\measuredangle ABC = 60°$ и $\measuredangle CAB = 30°$ (слика). Како је $AB = 16\,\text{cm}$ то је $BM = MA = 8\,\text{cm}$. Даље је $MN = 4\,\text{cm}$ као средња линија троугла и слично $PA = NP = 4\,\text{cm}$. Дакле, $BCMNPA = 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 28\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 159



Сл. уз зад. 162

160. Како је $2b + 2$ паран број, то следи да су a и c непарни. То значи да је b паран број. Како је $a + 1 = 2b + 2 = 3c + 3$, то је $a > b > c$. За најмању вредност производа треба изабрати да су a, b и c што мањи природни бројеви. Нека је $c = 3$, тада је $a = 11$ и $b = 5$. Како је b паран број, то не задовољава постављене услове. Нека је $c = 5$, тада је $a = 17$ и $b = 8$, па је најмањи производ $a \cdot b \cdot c = 5 \cdot 8 \cdot 17 = 680$.

161. $\frac{27}{64}$.

162. Како је $EC = 10\,\text{cm}$ и ако на AE изаберемо тачку F тако да је $AF = BC$, тада је $ABCF$ правоугаоник, а CEF правоугли троугао (слика). Одавде закључујемо да је $AB = CF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\text{cm}$. Дакле, $O_{ABCDE} = 8 + 7 + 6 + 8 + 13 = 42\,\text{cm}$.

163. Из $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{18}$ следи да је $x - y = 3$. Сада је

$$\frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - y) = \sqrt{3}.$$

164. Означимо страницу шестоугла $ABCDEF$ са a. Површина четвороугла $MNPQ$ једнака је половини површине правилног шестоугла чија су темена средишта страница шестоугла $ABCDEF$. Означимо страницу тог шестоугла са b. Тада је $b = QP = \frac{1}{2}AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (AE је краћа дијагонала правилног шестоугла). Дакле, тражени однос је

$$P_{ABCDEF} : P_{MNPQ} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} : \frac{3b^2\sqrt{3}}{4} = a^2 : \frac{3a^2}{8} = 8 : 3.$$

165. Како је $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, видимо да цифре тог троцифреног броја могу бити 4, 9 и 7 или 6, 6 и 7. Како су сви троцифрени прости бројеви непарни, то су решења неки од бројева 479, 497, 749, 947 или 667. Како $7 \mid 497$, $7 \mid 749$ и $23 \mid 667$ то су тражени прости бројеви 479 и 947.

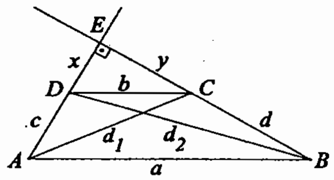
166. $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$; $\frac{21}{84} < \frac{12(2-x)}{84} < \frac{77}{84}$; $21 < 12(2-x) < 77$.

Како $x \in \mathbf{Z}$, то и $2 - x \in \mathbf{Z}$, па је $2 - x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, тј. $x \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$. Дакле, 5 целих бројева задовољава услове задатка.

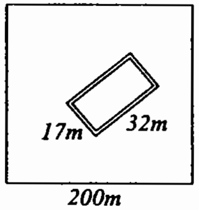
167. Нека је $ab : bc : ca = 2 : 3 : 5$, тј. $\frac{ab}{2} = \frac{bc}{3} = \frac{ca}{5}$. Сада је $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$ и $\frac{b}{3} = \frac{a}{5}$, односно $\frac{a}{10} = \frac{c}{15}$ и $\frac{a}{10} = \frac{b}{6}$. Коначно $\frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{15}$, односно $a : b : c = 10 : 6 : 15$.

168. Полазна једначина се може записати у облику $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}$, тј. $x^2 + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$, одакле је $x^2 = 1$, тј. $x = 1$ или $x = -1$.

169. Нека су дате ознаке као на слици. Тада је $a^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2$ и $b^2 = x^2 + y^2$, тј. $a^2 + b^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2$. Слично је и $d_1^2 = (c+x)^2 + y^2$ и $d_2^2 = x^2 + (d+y)^2$, тј. $d_1^2 + d_2^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2$, одакле долазимо до тврђења задатка.



Сл. уз зад. 169



Сл. уз зад. 172

170. Милена ће за подскупове $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, ... редом записивати на табли 2, 3, 5, ... Како је $S = \{8, 5, 1, 13, 3, 21, 2\}$, сваки број ће се налазити на табли онолико пута колико има елемената пре њега (ако их посматрамо у растућем поретку), тј.

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + 21 \cdot 6 = 246.$$

171. Урош је поклонио $4260 + 456 = 4716$ књига, а Јанош је поклонио $12502 - (4716 + 4260) = 3526$ књига.

172. Површина терена је $P_1 = 200 \cdot 200 = 40000\,\mathrm{m}^2$. Површина коју заузима базен са стазом је $P_2 = 32 \cdot 17 = 544\,\mathrm{m}^2$. Травњака око базена има $P = P_1 - P_2 = 39456\,\mathrm{m}^2$, што је 394 a $56\,\mathrm{m}^2$, слика.

173. $A = 7$, $B = 6$, $C = 4$, $D = 1$.

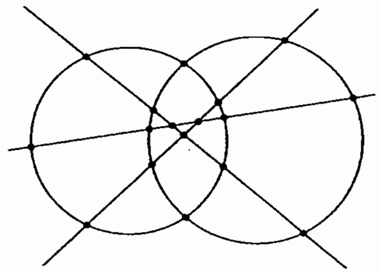
174. Како је $2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$, задатак има два решења. Ако су дужине страница 1 cm и 2008 cm, решење је $O = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018$ cm, а ако су дужине страница 8 cm и 251 cm, решење је $O = 2 \cdot (8 + 251) = 518$ cm.

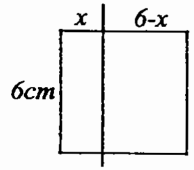
175. *Први начин.* На сваком спрату живи $48 : 4 = 12$ станара. Како је на једном спрату два стана у непарним и два стана у парним улазима, то 4 станара живи у становима у непарним улазима на једном спрату, а 8 станара у становима у парним улазима на једном спрату. Значи, у једном стану у непарним улазима живе два станара, а у једном стану у парним улазима живе четири станара.

Други начин. У укупно 8 станова у непарним улазима живи дупло мање станара него у 8 станова у парним улазима. Значи, у становима у непарним улазима живи $48 : 3 = 16$ станара, а у сваком таквом стану живи по два станара. У становима у парним улазима живи по 4 станара.

176. $1 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 1 : \frac{1}{2} = 2.$

177. Пресечних тачака има 17 (слика).


Сл. уз зад. 177



Сл. уз зад. 179

178. Како је $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ то су тражени бројеви $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11$, $15 = 3 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $33 = 3 \cdot 11$, $35 = 5 \cdot 7$, $55 = 5 \cdot 11$ и $77 = 7 \cdot 11$.

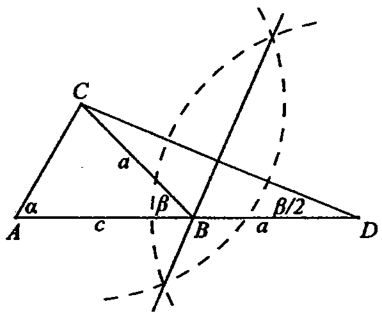
179. Како је $2 \cdot (6 - x) = 2 \cdot x + 5$, то је $x = \frac{7}{4}$ (слика). Мањи правоугаоник има површину $P_1 = \frac{7}{4} \cdot 6 = \frac{21}{2}\,\mathrm{cm}^2$, а већи правоугаоник $P_2 = \frac{17}{4} \cdot 6 = \frac{51}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

180. Ако $\frac{1}{2}$ kg сребра и $\frac{1}{3}$ kg злата кошта 750 000 динара, онда дупло већа количина, тј. 1 kg сребра и $\frac{2}{3}$ kg злата кошта 1 500 000 динара. Ако од овога одузмемо 1 kg сребра и $\frac{1}{2}$ kg злата добијамо да $\frac{1}{6}$ kg злата кошта 250 000 динара, одакле 1 kg злата кошта 1 500 000 динара. Сада једноставно добијамо да 1 kg сребра кошта 500 000 динара. Дакле, 1 kg сребра и 2 kg злата коштају 3 500 000 динара.

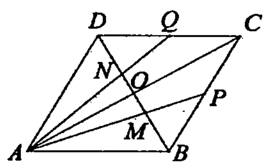
181. Како је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, то је $a = \frac{b}{20}$. Полазни израз постоје $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + 2 \cdot \frac{a}{b} + 4{,}5b - 4{,}5b$, одакле је вредност полазног израза $\frac{1}{8}$.

182. Ако је $x = 0,\overline{abab\ldots}$, тада је $100x = ab,\overline{abab\ldots}$. Из ове две једнакости добијамо да је $99x = \overline{ab}$, односно $x = \frac{\overline{ab}}{99} = \frac{10a + b}{9 \cdot 11}$. Како је збир бројиоца и имениоца несводљивог разломка 17, то мора да $9 \mid 10a + b$ или $11 \mid 10a + b$. Ако $11 \mid 10a + b$ онда је $10a + b = 11 \cdot (17 - 9) = 88$, одакле је $a = b = 8$. Међутим, како је $a \neq b$, ово не може бити решење. Ако $9 \mid 10a + b$, онда је $10a + b = 9 \cdot (17 - 11) = 54$, одакле је $a = 5$ и $b = 4$.

183. Нека је дат троугао ABC. Продужимо страницу AB преко темена B за дужину a и добијамо тачку D ($|AD| = a+c$). Троугао CBD је једнакокрак и угао β је његов спољашњи угао, па је $\angle BDC = \frac{\beta}{2}$. Такође, теме B, врх тог троугла, налази се на симетрали странице CD. Дакле, прво конструишемо троугао ADC чија је страница $a+c$ и углови α и $\frac{\beta}{2}$, чиме добијамо темена A и C, а у пресеку симетрале дужи CD и AD добијамо и теме B.



Сл. уз зад. 183



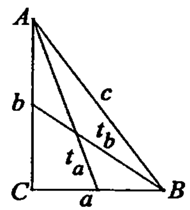
Сл. уз зад. 185

184. $4p\cdot(66q+r) = 2008$; $p\cdot(66q+r) = 502 = 2\cdot 251$. Како је $66q+r > 2$, то је $p = 2$ и $66q+r = 251$. Из $66q < 251$, имамо $q < 4$. За $q = 2$ је $r = 119 = 7\cdot 17$ па ово не може бити решење, а за $q = 3$ је $r = 53$ што је и решење задатка.

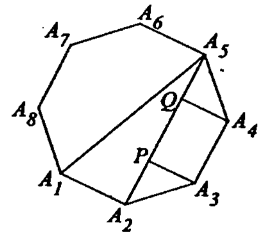
185. Троугао ABD је једнакостраничан ($\angle BAD = 60°$ и $BA = AD$) па је $BD = 12\,\text{cm}$ (слика). Означимо пресечну тачку дијагонала са O. Тада је $BO = 6\,\text{cm}$. Тачка M је тежиште троугла ABC (пресек тежишних дужи AP и BO). Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$, то је $OM = \frac{1}{3}BO = 2\,\text{cm}$. Аналогно, N је тежиште троугла ACD, и $NO = 2\,\text{cm}$. Дакле, $MN = MO + NO = 4\,\text{cm}$.

186. Важи $44 < \sqrt{2008} < 45$, па је $\sqrt{(\sqrt{2008}-45)^2} = |\sqrt{2008}-45| = 45 - \sqrt{2008}$ и $\sqrt{(44-\sqrt{2008})^2} = |44-\sqrt{2008}| = \sqrt{2008} - 44$.
Сада је $\sqrt{(\sqrt{2008}-45)^2} + \sqrt{(44-\sqrt{2008})^2} = 1$.

187. Како је $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = t_a^2 = 52$ и $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = t_b^2 = 73$, то је $\left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4} + a^2\right) = 125$, одакле је $\frac{5}{4}(a^2+b^2) = 125$, тј. $\frac{5}{4}c^2 = 125$ (слика). Дакле $c = 10\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 187



Сл. уз зад. 188

188. Четвороугао $A_2A_3A_4A_5$ је једнакокраки трапез. Нека су P и Q подножја нормала из тачака A_3 и A_4, редом, на A_2A_5 (слика). Како је A_3A_4QP правоугаоник, то је $PQ = 8\,\text{cm}$. Како је $\angle A_2A_3A_4 = 135°$, то је $\angle A_2A_3P = 45°$, па је троугао A_2A_3P једнакокрако-правоугли и његова хипотенуза је $8\,\text{cm}$. Одатле добијамо да је $PA_2 = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. Сада је $A_2A_5 = 8\cdot(1+\sqrt{2})\,\text{cm}$ и $\angle A_1A_2A_5 = 90°$, па је тражена површина $32\cdot(1+\sqrt{2})\,\text{cm}^2$.

189. У датом изразу има 502 разлике квадрата

$$(1004^2 - 1003^2) + (1002^2 - 1001^2) + \ldots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2)\,.$$

Када раставимо сваку од ових разлика квадрата на чиниоце, један чинилац ће бити 1, па добијамо следећи збир од 502 сабирка $2007 + 2003 + \ldots + 7 + 3$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., имамо да је тражени збир $251\cdot 2010$. Како $8 \mid 2008$, а $8 \nmid 2010$, закључујемо да дати израз није дељив са 2008.

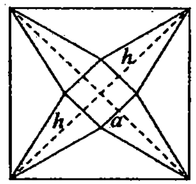
190. Број је „симпатичан" ако је барем једна његова цифра парна. Шестоцифрени бројеви који нису „симпатични" у свом запису имају само непарне цифре, а њих је укупно $5^6 = 15625$. Како шестоцифрених бројева има 900 000, то „симпатичних" има $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.

191. За $x \geqslant 0$, добијамо $|x - |x - |x||| = |x - |x - x|| = |x| = x$, па је $x = 2008$ једно решење.
За $x < 0$, добијамо $|x - |x - |x||| = |x - |x + x|| = |x + 2x| = -3x$, па је $x = -\frac{2008}{3}$ још једно решење једначине.

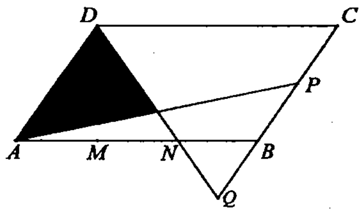
192. Како је $\frac{3}{4}x + 12 = 0$ за $x = -16$ то су координате тачке $A(-16,0)$. Слично, за $-\frac{4}{3}x + 12 = 0$ добијамо $x = 9$, па су координате тачке $B(9,0)$. Из $\frac{3}{4}x + 12 = -\frac{4}{3}x + 12$ добијамо $x = 0$, па је $C(0,12)$.
а) Дужине страница овог троугла су $a = 15$, $b = 20$ и $c = 25$, а како је $c^2 = a^2 + b^2$, то је троугао ABC правоугли.

б) $O_{ABC} = 60$, $P_{ABC} = 150$.

193. Страница квадрата је $5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а његова дијагонала $10\,\mathrm{cm}$, слика. Сада је $10 = a+2h$ и како је $h = 2a$, добијамо да је $a = 2\,\mathrm{cm}$ и $h = 4\,\mathrm{cm}$. Површина пирамиде је $P = 2^2 + 4 \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 20\,\mathrm{cm}^2$ што је 40% од површине квадрата.



Сл. уз зад. 193



Сл. уз зад. 195

194. Укупан број коцки је n^3 $(n \in \mathrm{N})$, па како је $\frac{13}{72}$ црвених и $\frac{25}{48}$ белих, то n^3 мора бити дељиво са 72 и 48. Како је $72 = 3^2 \cdot 2^3$ и $48 = 3 \cdot 2^4$ то је $n^3 = 3^3 \cdot 2^6 \cdot k^3$. Како је $\frac{13}{72} = \frac{312 \cdot k^3}{12^3 k^3}$ од укупног броја црвених, а $\frac{25}{48} = \frac{900 \cdot k^3}{12^3 k^3}$ белих, то је плавих $\frac{516 \cdot k^3}{12^3 k^3}$. Међутим, плавих је мање од 1000 па је $k = 1$. Број плавих коцки је 516, а укупно их је $12^3 = 1728$.

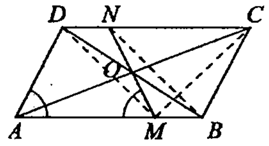
195. Продужавајући BC и DN тако да се одговарајуће праве секу у тачки Q, непосредно се види да је $\triangle AND \sim \triangle BNQ$ па је сада $BQ = \frac{1}{2}AD$ (слика). Како је $PQ = AD$, то је $AQPD$ паралелограм чију једну четвртину чини осенчени део. Како је $P_{ABCD} = P_{AQPD}$ (једнаке су им страница и одговарајућа висина), то осенчени део чини $\frac{1}{4}$ површине паралелограма $ABCD$.

196. Означимо број година које је Марко напунио 2000-те године са $2x$. Онда је сестра напунила x година, а мајка $4x$. Сада имамо да су године рођења Марка $2000 - 2x$, сестре $2000 - x$ и мајке $2000 - 4x$. Дакле, имамо једначину

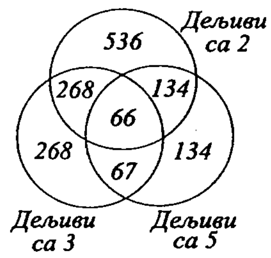
$$(2000 - x) + (2000 - 2x) + (2000 - 4x) = 5923,$$

одакле је $x = 11$. Дакле Марко је 2000-те напунио 22 године, а 2008. године је напунио 30 година.

197. Нека је N пресек праве MO и странице CD (слика). Очигледно је $\triangle AMO \cong \triangle CNO$ $(AO = OC$, $\angle MAC = \angle ACN$, $\angle AOM = \angle CON)$ па је $AM = NC$. Како је $\angle MAD = \angle AMN$, то је $AMND$ једнакокраки трапез па је $AD = MN$. Сада је $\triangle AMD \cong \triangle NCM$ $(AM = NC$, $AD = MC$, $\angle DAM = \angle AMN = \angle MNC)$, а одатле је $MC = MD$.



Сл. уз зад. 197

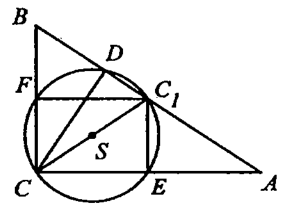


Сл. уз зад. 198

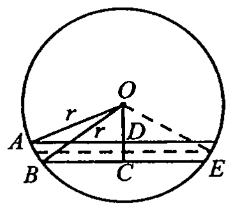
198. Одредимо колико има бројева од 1 до 2008 који су дељиви барем једним од бројева 2, 3 и 5. Са дијаграма видимо да таквих бројева има 1473. Дакле, сложених бројева мањих од 2008 има најмање 1470 (одузели смо просте бројеве 2, 3 и 5), а простих највише 538 што доказује тврђење задатка.

199. Нека је C_1 средиште хипотенузе AB (слика). Четвороугао EC_1FC је правоугаоник па тачке E, C_1, F и C припадају кружници описаној око тог правоугаоника. Средиште кружнице је тачка S и при томе је $CS = SC_1$.

Како је $\angle CDC_1 = 90°$, то је троугао CDC_1 правоугли па је центар описане кружнице око овог троугла средиште његове хипотенузе, дакле тачка S, таква да је $CS = SC_1$. Следи да се описане кружнице око правоугаоника EC_1FC и тоугла CDC_1 поклапају, а одатле следи тврђење задатка.



Сл. уз зад. 199



Сл. уз зад. 202

200. Како је $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$, $a_6 = -1$, $a_7 = 1$, $a_8 = -1$, $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$, $a_{11} = -1$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = -1$, $a_{15} = -1$, $a_{16} = 1$, $a_{17} = -1$, $a_{18} = -1$, $a_{19} = 1$, $a_{20} = -1$, то закључујемо да ће се бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ понављати (у блоковима по 15), а како се у том првом блоку блок $1, -1, -1$ понавља пет пута, то закључујемо да је

$$a_{3k+1} = 1, \quad a_{3k+2} = -1, \quad a_{3k+3} = -1$$

за било које $k \in \mathrm{N}_0$. Како је $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, то је $a_{2008} = 1$. Тражени збир је $670 \cdot 1 + 669 \cdot (-1) + 669 \cdot (-1) = -668$.

201. Како је $x^4-2x^2+1+y^{2008}=1$, односно $\left(x^2-1\right)^2+\left(y^2\right)^{1004}=1$, то је $\left(x^2-1\right)^2=1$ и $\left(y^2\right)^{1004}=0$ или $\left(x^2-1\right)^2=0$ и $\left(y^2\right)^{1004}=1$. Дакле, једина целобројна решења су: $(x,y)\in\{(0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\}$.

202. Означимо $OD=x$ и $OC=y$ (слика). По услову задатка је $y-x=2\,\text{cm}$. Из $\triangle ODA$ имамо једнакост $r^2=x^2+36$, а из $\triangle OCB$ имамо једнакост $r^2=y^2+16$. Изједначавајући десне стране ових једнакости имамо $y^2-x^2=20$, одакле је $x+y=10$. Из једначина $x+y=10$ и $x-y=2$ добијамо $x=4$ и $y=6$ и да је полупречник круга $r=\sqrt{52}\,\text{cm}$.

(i) Ако су дате тетиве са исте стране центра кружнице, тражена тетива ће бити на удаљености $\dfrac{x+y}{2}=5\,\text{cm}$. Ако са d означимо њену дужину, имамо да је

$$r^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

одакле добијамо $d=6\sqrt{3}\,\text{cm}$.

(ii) Ако су дате тетиве са разних стране центра кружнице, тражена тетива ће бити на удаљености $\dfrac{y-x}{2}=1\,\text{cm}$. Ако са d означимо њену дужину, имамо да је

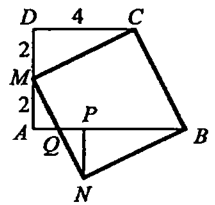
$$r^2=\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

одакле добијамо $d=2\sqrt{51}\,\text{cm}$.

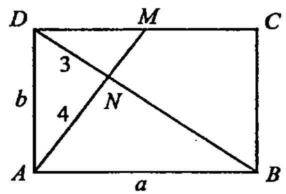
203. Ако је $a\leqslant x<b$, тада је $x\in[a,b)$. Ако посматрамо низ интервала $[2,4)$, $[4,16)$, $[16,256)$ и $[256,2008]$, тада притиском на типку „корен" број из једног интервала прелази у интервал лево, односно први у интервал $(1,2)$. Тада бројеви из другог и четвртог интервала (из $[4,16)$ и $[256,2008]$) ће после парног броја употребе типке „корен" бити у интервалу $(1,2)$. Значи, тражених природних бројева има $12+1753=1765$.

204. Како је $P_{ABCD}=20$, то тражени квадрат треба да има страницу дужине $2\sqrt{5}$. Даље је $CB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. Нека је M средиште дужи AD, па је $CM=2\sqrt{5}$ и $\measuredangle BCM=90^\circ$, јер је $\measuredangle DMC=\measuredangle ABC$ (углови са нормалним крацима).
Одредимо N тако да је $MN\perp MC$ и $BN\perp BC$, P је пресек AB и MN и Q подножје нормале из N на AB (слика). Непосредно се види да је $\triangle MDC\cong\triangle NQB$ и како је онда $NQ=2$, да је $\triangle APM\cong\triangle QPN$. Дакле, трапез треба резати на два правоугла троугла и један трапез и то тако да прво режемо од C нормално на BC до AD, а затим од M паралелно са BC до AB.

205. Број је дељив са 3 ако и само ако је збир његових цифара дељив са 3. Ако на произвољан начин фиксирамо првих 2007 цифара, онда ћемо последњу цифру бирати тако да допуњује остатак збира цифара до дељивости са 3.



Сл. уз зад. 204



Сл. уз зад. 206

Како свака класа има тачно по три елемента ($\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{0,6,9\}$), то тражених бројева има $3\cdot 8\cdot 9^{2\,006}$.

206. Троуглови ABN и MDN су слични (сви унутрашњи углови су једнаки) и $k=\dfrac{1}{2}$ (слика). Одатле следи да је $MN=2\,\text{cm}$ и $NB=6\,\text{cm}$. Уведимо ознаке $AD=b$ и $AB=a$.
Из $\triangle ABD$ имамо $b^2+a^2=81$, тј. $b^2=81-a^2$. $(*)$
Из $\triangle AMD$ имамо $b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=36$, тј. $b^2=36-\dfrac{a^2}{4}$. $(**)$
Изједначавајући десне стране једнакости $(*)$ и $(**)$ израчунавамо да је $a=2\sqrt{15}\,\text{cm}$, а заменом вредности за a у једној од једначина добијамо $b=\sqrt{21}\,\text{cm}$. Дакле, површина правоугаоника је $P=6\sqrt{35}\,\text{cm}^2$.

207. Разликујемо случајеве:
(i) $c\geqslant 0$. Полазне једначине постају $|a-b|+c=19$ и $ab-c=-97$. Сабирањем једначина имамо $|a-b|+ab=-78$.

(i.1) Ако је $a-b\geqslant 0$, имамо да је $a-b+ab=-78$, одакле је

$$a(b+1)-(b+1)=-79,\quad \text{тј.}\quad (a-1)(b+1)=-79.$$

Вредности за a и b које испуњавају последњу једнакост и услов $a-b\geqslant 0$ су $(a,b)\in\{(80,-2),\ (2,-80)\}$. У оба случаја не постоји $c\geqslant 0$ за које важе обе полазне једначине па у овом случају полазни систем нема решења.

(i.2) Аналогно претходном, за $a-b<0$ добијамо $(a+1)(b-1)=-79$. Вредности за a и b које испуњавају последњу једнакост и услов $a-b<0$ су $(a,b)\in\{(-80,2),\ (-2,80)\}$. У оба случаја не постоји $c\geqslant 0$ за које важе обе полазне једначине па и у овом случају полазни систем нема решења.

(ii) $c<0$. Полазне једначине постају $|a-b|+c=19$ и $ab+c=-97$. Одузимањем друге од прве имамо $|a-b|-ab=116$.

(ii.1) Ако је $a-b\geqslant 0$, имамо да је $a-b-ab=116$, одакле је $(a+1)(1-b)=117$. Вредности за a, b и c које задовољавају последњу једнакост и $a-b\geqslant 0$ су $(a,b,c)\in\{(116,0,-97),\ (0,-116,-97),\ (38,-2,-21),\ (2,-38,-21),\ (12,-8,-1),\ (8,-12,-1)\}$.

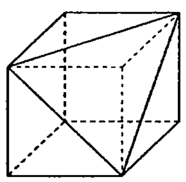
(ii.2) Ако је $a - b < 0$, имамо да је $b - a - ab = 116$, одакле је $(1 - a)(b + 1) = 117$. Вредности за a, b и c које задовољавају последњу једнакост и $a - b < 0$ су $(a, b, c) \in \{(0, 116, -97), (-116, 0, -97), (-2, 38, -21), (-38, 2, -21), (-8, 12, -1), (-12, 8, -1)\}$.

208. Како је $(x^5 - x) - (y^5 - y) - 5(x^3 - x) = 2008$, то је за дељивост леве стране са 5 довољно доказати да је $x^5 - x$ (односно $y^5 - y$) дељиво са 5. Међутим, $x^5 \equiv x \pmod 5$ је очигледно. Значи лева страна је дељива са 5 за свако целобројно x и y и $2008 \equiv 3 \pmod 5$, па не постоје целобројне вредности за x и y тако да важи почетна једнакост.

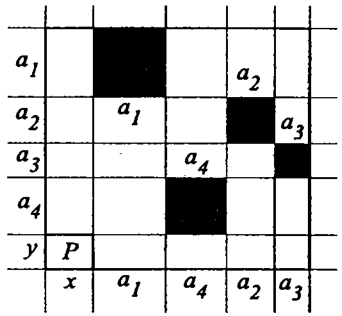
Напомена. Задатак се може слично урадити и посматрајући дељивост са 3.

209. Тело чија је мрежа дата је коцка од које је одсечена тространа призма чија је основа једнакокрако-правоугли троугао, чији је крак дужине a, и висина a (слика). Дакле, запремину добијамо када од запремине коцке одузмемо запремину пирамиде,

$$V = a^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3.$$



Сл. уз зад. 209



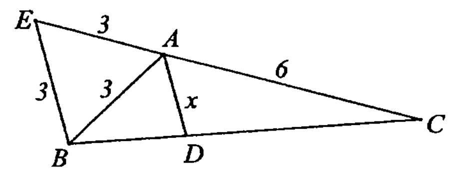
Сл. уз зад. 210

210. Ако се у једној „врсти" или једној „колони" налазе два квадрата, онда су они очигледно подударни. Дакле, ако има тачно четири квадрата дужина страница a_1, a_2, a_3 и a_4 и у свакој „врсти" или свакој „колони" је тачно по један (види слику), онда су странице правоугаоника P дужина

$$y = a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = x.$$

Дакле, уочени правоугаоник је квадрат, пети, што је контрадикција. Значи, како има тачно четири квадрата онда барем два морају бити у истој „врсти" или „колони" па су онда барем два подударна.

211. Означимо са x дужину дужи AD. Нека је E тачка на продужетку дужи AC, таква да је $AE = 3$. Троугао ABE је једнакостраничан, па је $BE = 3$. Како је $\measuredangle DAB = \measuredangle ABE = 60°$, то је $BE \parallel DA$, па су троуглови ADC и EBC слични. Следи да је $\frac{x}{3} = \frac{6}{9}$, одакле је $x = 2$.



Сл. уз зад. 211

212. За $n = 8$ добијамо број 201, коме је сума цифара 3. Доказаћемо да је ово тражена минимална сума цифара. Важи

$$3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod 2,$$

па су сви бројеви датог облика непарни. Зато је немогуће да бројеви имају суму цифара 1, као ни да буду облика $2 \cdot 10^m$. Према томе, треба испитати да ли једначина

$$3n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решења у скупу природних бројева.
Трансформацијом добијамо $n(3n + 1) = 10^m = 1 \cdot 10^m = 2^m \cdot 5^m$. Како су бројеви n и $3n+1$ узајамно прости, имамо два случаја ($n < 3n+1$): 1° $n = 1$, $3n + 1 = 10^m$ или 2° $n = 2^m$, $3n + 1 = 5^m$.
Први случај је немогућ, док за други случај добијамо $3n + 1 = 3 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. За $m = 1$ и $m = 2$ не добијамо једнакости ($3 \cdot 2 + 1 \neq 5$, односно $3 \cdot 4 + 1 \neq 25$), па имамо следећу процену

$$5^m = 5^2 \cdot 5^{m-2} > 24 \cdot 5^{m-2} > 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{m-2} = 3 \cdot 2^{m+1} > 3 \cdot 2^m + 1,$$

па дата једначина нема решења у скупу природних бројева. Како за $n = 1$, односно $n = 2$ добијамо бројеве са збиром цифара 5, односно 6, закључујемо да је најмања сума цифара једнака 3.

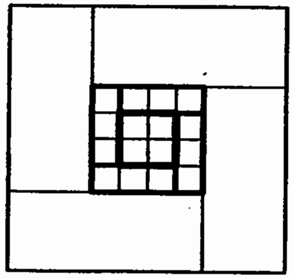
213. (а) Обојимо поља квадрата 100×100 бојама 1, 2, 3 као на слици а). После одсецања квадрата 2×2, у преосталом делу биће 3333 квадрата боје 1, 3331 квадрат боје 2 и 3332 квадрата боје 3. Како сваки правоугаоник 1×3 покрива по једно поље сваке боје, поплочавање је немогуће.
(б) После исецања централног квадрата 2×2, уоквиримо рупу са 4 правоугаоника, као на слици б). Остатак се може разложити на 4 правоугаоника 48×52. Како $3 \mid 48$, поплочавање је могуће.

214. Сабирањем датих једнакости добија се $xy + zt = x + y + z + t$, па је $xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2$. Тада је $x(y-1) - (y-1) + z(t-1) - (t-1) = 2$, тј. $(x - 1)(y - 1) + (z - 1)(t - 1) = 2$. Како је $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ то је

$$x - 1 \geqslant 0, \quad y - 1 \geqslant 0, \quad z - 1 \geqslant 0, \quad t - 1 \geqslant 0,$$

1	3		...	1	3	2	1
2	1	3	...		1	3	2
	2	1	...			1	3
			...				1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			...		2	1	3
1			...			2	1

Сл. уз зад. 213 а)



Сл. уз зад. 213 б)

па су могући следећи случајеви:

1° $(x-1)(y-1)=0$ и $(z-1)(t-1)=2$,

2° $(x-1)(y-1)=1=(z-1)(t-1)$ и

3° $(x-1)(y-1)=2$ и $(z-1)(t-1)=0$.

Ако је $(x-1)(y-1)=0$, онда је $x=1$ или $y=1$, а из $(z-1)(t-1)=2$ следи да је $z=2$ и $t=3$ или $z=3$ и $t=2$. Како је $zt=6=x+y$, то су могућа решења $(1,5,2,3)$, $(1,5,3,2)$, $(5,1,2,3)$, $(5,1,3,2)$.

Ако је $x-1=y-1=z-1=t-1=1$, једино решење је $x=y=z=t=2$, тј. решење је $(2,2,2,2)$.

У трећем случају разматрање је аналогно првом и добијамо решења $(2,3,1,5)$, $(2,3,5,1)$, $(3,2,1,5)$, $(3,2,5,1)$.

Провера показује да су наведених 9 тројки заиста решења датог система.

215. Доказаћемо да је тражени збир највећи ако имамо домине са паровима бројева $(1,2)$, $(3,4)$, $\dots$, $(2007,2008)$. Претпоставимо да на две домине имамо парове (a,b) и (c,d) и да важи распоред $a>b$ и $c>d$. Не умањујући општост, претпоставимо да је a највећи међу бројевима a, b, c, d. Уколико извршимо замену бројева, имамо домине са паровима (a,c) и (b,d). Ако се збир свих реципрочних вредности повећава, тада важи неједнакост

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}<\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$

Сређивањем добијамо $ab+cd-ac-bd>0$, односно $(a-d)(b-c)<0$. Како је $a>d$, следи да b мора бити мање од c.

Понављањем овог поступка добијамо да је збир $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_{1004}}$ највећи када су бројеви на доминама узастопни и једнаки $(1,2)$, $(3,4)$, $\dots$, $(2007,2008)$.

Зато је

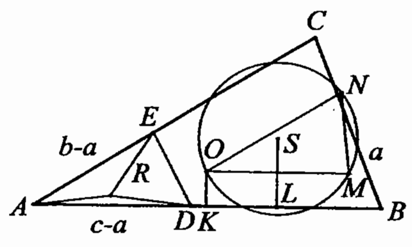
$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_{1004}} &\leqslant \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2007\cdot 2008}\\ &=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}\right)\\ &=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2008}\right)\\ &=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{1004}\right)\\ &=\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\dots+\frac{1}{2008}.\end{aligned}$$

216. *Прво решење.* Нека су K и L подножја нормала из тачке O (центра описаног круга око троугла ABC) и тачке S (центра уписаног круга у троугао ABC) на страницу AB (слика).

Нека су $OM \parallel AB$ и $ON \parallel AC$ тетиве круга $k(S,SO)$. Тада је $OM=2KL$. Како је $KL=KB-LB$, то је

$$KL=\frac{c}{2}-\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)=\frac{b-a}{2},$$

па је $OM=b-a$. Аналогно се доказује да је $ON=c-a$.



Сл. уз зад. 216

Како је $AD=c-a$ и $AE=b-a$ и како је $\measuredangle BAC=\measuredangle MON$ (као углови са паралелним крацима), то је $\triangle ADE\cong\triangle OMN$, јер је $AD=ON=c-a$, $\measuredangle BAC=\measuredangle MON$ и $AE=OM=b-a$ (СУС). Из подударности троуглова ADE и OMN следи и да су полупречници кругова који су око њих описани једнаки, тј. $OS=R$.

Друго решење (скица). Према познатој Ојлеровој релацији, за растојање центара описаног и уписаног круга троугла важи

$$OS^2=R(R-2r),$$

где су R и r полупречници тих кругова. При том се између вредности тих полупречника може извести следећа веза

$$r=R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1),$$

па се увршћавањем у претходну релацију добија да је

$$OS^2=R^2(3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)).$$

С друге стране, ако са ρ означимо полупречник описаног круга троугла ADE, на основу синусне теореме важи $\rho = \dfrac{DE}{2\sin\alpha}$, а из косинусне теореме следи да је $DE^2 = (c-a)^2+(b-a)^2-2(b-a)(c-a)\cos\alpha$. Комбиновањем ових релација, после сређивања се добија да је

$$\rho^2 = R^2(3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)).$$

Тиме је доказано да важи $\rho = OS$.

217. Због

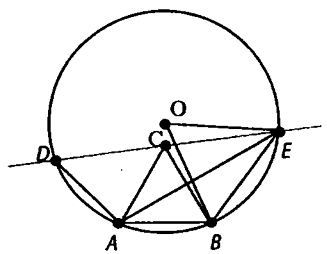
$$\begin{aligned}400 = 20^2 &= (a+b+c+d)^2\\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+300\end{aligned}$$

важи $a^2+b^2+c^2+d^2 = 100$, па је

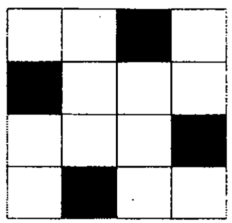
$$\begin{aligned}&(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\\ &\quad= 3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ &\quad= 300-300 = 0.\end{aligned}$$

Одавде следи да је $a = b = c = d$, па из $a+b+c+d = 20$ добијамо да је $a = b = c = d = 5$.

218. Како је $AD = AC$, троугао CDA је једнакокрак (слика). Ако означимо $\angle ADC = \angle ACD = \alpha$ и $\angle BCE = \beta$, тада је $\alpha+\beta = 120°$. У тетивном четвороуглу $ABED$ је $\angle ABE = 180°-\alpha$, па је $\angle CBE = 120°-\alpha = \beta$. Дакле, и троугао CBE је једнакокрак, па је четвороугао $ABEC$ делтоид. Следи да је AE симетрала угла BAC, па је $\angle EAB = 30°$ и одговарајући централни угао $\angle EOB = 60°$ (O је центар кружнице k). Зато је $\triangle OBE$ једнакостраничан и $BE = 1$, па је у једнакокраком троуглу CBE и $CE = BE = 1$.



Сл. уз зад. 218


Сл. уз зад. 220

219. Дата једначина се може написати у облику $\dfrac{4}{r+1} = \dfrac{p-q}{q}$, односно

$$4q = (p-q)(r+1).$$

Размотримо следеће случајеве.
1° $q = 2$. Једначина постаје $8 = (p-2)(r+1)$ и лако је видети да је задовољена (уз услов да су p и r прости бројеви) само за $p = 3$ и $q = 7$, тј. тројка $(3,2,7)$ је решење задатка.
2° q је непаран прост број. Тада су једине могућности (а) $p-q = 2$, $r+1 = 2q$ и (б) $p-q = 4$, $r+1 = q$ (у осталим случајевима не могу се добити прости p и r).
(а) За $q = 3$ добија се решење $(5,3,5)$. Ако је $q > 3$, онда је $q \equiv \pm1 \pmod 3$. У случају $q \equiv 1 \pmod 3$ је $p \equiv 0 \pmod 3$, а у случају $q \equiv -1 \pmod 3$ је $r \equiv 0 \pmod 3$, па више решења нема.
(б) У овом случају је једина могућност $r = 2$, $q = 3$, што даје још једно решење $(7,3,2)$.
Сва решења задатка су тројке $(3,2,7)$, $(5,3,5)$ и $(7,3,2)$.

220. Број поља која могу да промене боју у једном потезу је највише 5. Дакле, број потребних потеза је најмање 4. Уочимо фигуру на слици на којој су четири поља маркирана. Јасно је да, полазећи од „беле табле“, применом 4 дозвољена потеза на означена поља, можемо таблу превести у „црну“. Такође, како узастопна примена два потеза на исто поље ништа не мења, и за свако парно $n \geqslant 4$ може се добити „црна“ табла.
Докажимо да се ни за једно непарно n постављени циљ не може постићи. Посматрајмо поново поља означена на слици. У било ком потезу (без обзира на које поље га примењујемо) мења се боја тачно једног од та четири означена поља. Дакле, у сваком потезу мења се парност броја црних поља међу та 4 означена. Како је у почетку тај број био 0, он ће у сваком случају после непарног броја потеза бити непаран, дакле не може бити једнак 4, што би морало бити ако је читава табла „црна“. Тиме је наведено тврђење доказано.

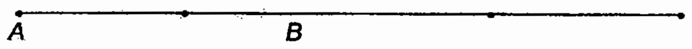
2009. година

221. а) 857; б) 693; в) 37.

222. а) $7\boxed{+}2\boxed{=}39\boxed{-}30$; б) $30\boxed{+}40\boxed{=}70\boxed{-}0$; $30\boxed{+}40\boxed{-}70\boxed{=}0$.

223. Мирјана има $485 : 5 = 17$ салвета, а Славица $17 + 5 = 22$.

224. Како је $BD = 16\,\text{cm}$, то је $AB = AD - BD = 4\,\text{cm}$. Дуж AC је једнака збиру дужи AB и BC, па је $BC = AC - AB = 11\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 224

225. У односу на пре две године, за три године и Ненад и његов син ће имати 5 година више. Значи, укупан број година ће се повећати за 10, па ће заједно имати 50 година.

226. Највећи број који задовољава дате услове је 8 877 550, а најмањи 3 003 558.

227. $(46238 - 9393) : 5 = 36845 : 5 = 7369$.

228. Нека је у квадратићу лево од бројева 1477 и 2306 број a, а десно број b.

	528			a	1477	2306	b	

Тада је по услову задатка $a+1477+2306 = 1477+2306+b$, одакле закључујемо да је $a = b$. Посматрајмо сада бројеве лево и десно од a и 1477. Као и раније закључујемо да су ти бројеви једнаки.

	528		2306	a	1477	2306	a	

Дакле, у датој траци сви бројеви између којих су друга два поља су једнаки, па траку треба попунити овако

2306	528	1477	2306	528	1477	2306	528	1477

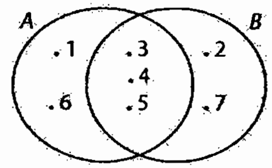
229. Као цифра јединица у једној стотини цифра 4 се употреби 10 пута, а у 9 стотина укупно 90 пута. Као цифра десетица цифра 4 се у једној стотини употреби 10 пута, а у 9 стотина 90 пута. Као цифра стотина цифра 4 се употреби 100 пута. Дакле, цифра 4 се укупно употреби 280 пута.

230. Ако повећамо дужину једног пара наспрамних страница за по неки број, а дужине другог пара наспрамних страница смањимо за по исти тај број, обим се неће променити, па је и обим квадрата $2\,\text{m} = 20\,\text{dm}$. Одатле имамо да су странице квадрата по $5\,\text{dm}$. Странице правоугаоника су за $10\,\text{cm} = 1\,\text{dm}$ мање, односно веће, па су оне $4\,\text{dm}$ и $6\,\text{dm}$.

231. Осенчена је $\frac{1}{2}$ квадрата, $\frac{1}{3}$ правоугаоника и $\frac{1}{3}$ круга.

232. Најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите је 10234. Међутим, овај број није дељив ни са 3 ни са 4. Први већи број који је дељив са 4 је 10236 (двоцифрени завршетак дељив са 4), а како је он дељив и са 3, то је он и решење задатка.

233. Пресеку скупова припадају елементи 3, 4 и 5. Како само скупу A припадају елементи 1 и 6, то само скупу B припадају елементи 2 и 7. Дакле, $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.



Сл. уз зад. 233

234. Како је угао од своје трећине већи за 32°, то су две трећине тог угла 32°, а једна трећина 16°. Како је трећина угла 16°, цео угао је 48° а комплемент тог угла је угао од 42°.

235. Раставимо бројеве на производ 3 различита једноцифрена броја: $20 = 1\cdot 4\cdot 5$, $108 = 2\cdot 6\cdot 9 = 3\cdot 4\cdot 9$, $168 = 4\cdot 6\cdot 7 = 3\cdot 7\cdot 8$, $42 = 2\cdot 3\cdot 7$ и $80 = 2\cdot 5\cdot 8$. Број 7 треба уписати у трећи ред и прву колону, пошто је чинилац бројева 168 и 42. Слично уписујемо и бројеве 5, 9 и 8 (види прву слику), а онда уписујемо и преостале бројеве:

	5		20
		9	108
7	8		168
42	80	108	

	5		20
	2	9	108
7	8	3	168
42	80	108	

1	5	4	20
6	2	9	108
7	8	3	168
42	80	108	

236. $x = -2$, $y = -3$, $|x - 1| - |y - 2| = -2$.

237. $|(-2009 : 49 + 2009 : 41 - 2009 : 7) : 9| = |(-41 + 49 - 287) : 9| = |-31| = 31$.

238. Троугао BCD је једнакокрак и $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 130°$, па је $\angle CBD = \angle CDB = 25°$. сада је $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 60° - 25° = 35°$.

239. Бројеви које је Весна записала су: 2008, 2006, ... , 6, 4, 2 (укупно 1004 позитивна цела броја), 0, -2, -4, -6, ... , -2006, -2008 (укупно 1004 негативна цела броја и нула). Како је сваком позитивном целом броју записан и њему супротан број, тражени збир је 0.

240. Срећко за 6 сати очистио укупно

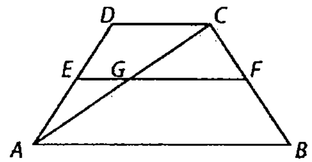
$$3\cdot(3\cdot 2{,}5)+1{,}4\cdot 12+2\cdot(3{,}5\cdot 3)=60{,}3\,\mathrm{m}^2.$$

Дакле, остало му је да очисти још $80-60{,}3=19{,}7\,\mathrm{m}^2$.

241. $AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=2\sqrt{2}$ и $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=2\sqrt{3}$, па је $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=4$. $MQ=\sqrt{MR^2+RQ^2}=\sqrt{10}$ и $MP=\sqrt{MQ^2+QP^2}=\sqrt{19}$, па је $MN=\sqrt{MP^2+PN^2}=\sqrt{20}$. Како је $\sqrt{16}<\sqrt{20}$, то је $4<\sqrt{20}$, тј. $AB<MN$.

242. $2008^1=2008$, $2008^2=\dots 4$, $2008^3=\dots 2$, $2008^4=\dots 6$, $2008^5=\dots 8$, ... Дакле, период понављања последње цифре у степену броја 2008 је 4 и то ако степен има остатак 1, последња цифра је 8. Како 2009 при дељењу са 4 даје остатак 1, последња цифра траженог степена је 8.

243. Како је EF средња линија трапеза $ABCD$, то је EG средња линија троугла ADC и GF је средња линија троугла ABC. Закључујемо да је $DC=2EG=4\,\mathrm{cm}$ и $AB=2GF=10\,\mathrm{cm}$, па је $P_{\triangle ACD}:P_{\triangle ABC}=2:5$ јер су висине тих троуглова једнаке.



Сл. уз зад. 243

244. а) $\sqrt{3+\frac{1}{16}}-\sqrt{2-\frac{7}{16}}=\sqrt{\frac{49}{16}}-\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

б) $\sqrt{1{,}69-0{,}25}-\sqrt{6{,}25-5{,}76}=\sqrt{1{,}44}-\sqrt{0{,}49}=0{,}5$.

245. Славина A за 1 сат напуни $\frac{1}{12}$, а славина B $\frac{1}{15}$ базена. Одводна цев за 1 сат испразни $\frac{1}{10}$ базена. Дакле, за један сат напуниће се $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$ базена. Цео базен ће се напунити за 20 сати.

246. Три паралелне праве одређују највише 3 равни. По једна од 3 паралелне праве и по једна од 5 тачака одређују највише 15 равни. Пет тачака од којих су 3 колинеарне одређују највише 5 равни (у случају када су праве које одређују по једна од 3 колинеарне и по једна од две две преостале тачке мимоилазне). Дакле, постоји највише 23 равни.

247. $9(n-3)^2-\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2=0$. Извлачењем испред заграде имамо да је $(n-3)^2\cdot\left(9-\frac{n^2}{4}\right)=0$. Сада је $(n-3)^2=0$ или $9-\frac{n^2}{4}=0$. Решење прве једначине је $n=3$ (троугао), тј. $d_n=D_n=0$. Решење друге једначине је $n=6$ (шестоугао), тј. $d_n=3$, $D_n=9$.

248. $x\geqslant\frac{3}{14}$.

249. $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5\,\mathrm{cm}$, MC је хипотенуза правоуглог троугла MCC_1. CC_1 је тежишна дуж правоуглог троугла ABC и једнака је половини хипотенузе AB, тј. $CC_1=5/2\,\mathrm{cm}$. Сада је

$$MC=\sqrt{MC_1^2+CC_1^2}=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

250. Најмањи број ће бити онај који има најмање цифара, а то значи када у збиру употребимо што више пута цифру 9. Како је први мањи број од 2009 који је дељив са 9, број 2007, у том збиру се цифра 9 јавља 223 пута. Дакле, тражени број је $2\underbrace{99\dots 9}_{223}$.

251. а) $131+622$ и $132+621$.
б) Како при одузимању цифре јединица једну десетицу преводимо у јединице, цифре десетица се заправо разликују за 7, па су сва могућа решења: 492 и 329, 482 и 319, 472 и 309.

252. Нека могућа решења су $5\cdot(5\cdot 5-5)$, $(5\cdot 5-5)\cdot 5$ или $(5+5)\cdot(5+5)$.

253. Збир три иста једноцифрена броја, означена са A, завршава се цифром 1. Како збир три једноцифрена броја може да буде најмање 3, а највише 27, то су могуће вредности овог збира 11 и 21. Како 11 не може да се подели са 3, то је тражени збир 21, а вредност слова A је 7.

254. а) 6 правих: $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(A,E)$, $p(B,D)$, $p(B,E)$, $p(C,D)$.
б) 10 дужи: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

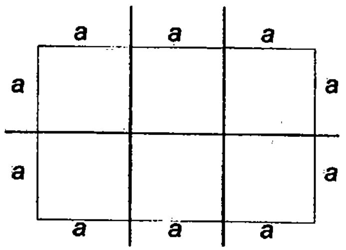
255. Од 1. јануара до 7. марта прође укупно 65 дана. Дакле, часовник ће каснити $65:5=13$ пута по 6 секунди, што је укупно 78 секунди. Часовник ће у подне 7. марта показивати 11 часова 58 минута и 42 секунде.

256. 2.

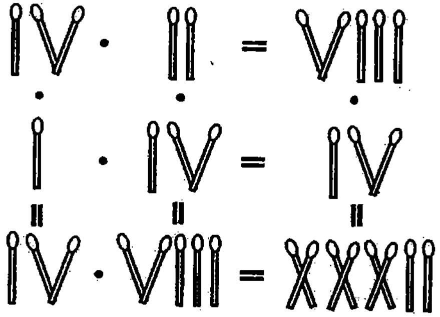
257. Како при било ком сабирању два броја од 1 до 4 нема прелаза преко десетице, то 3 можемо добити као $1+2$, а 7 као $3+4$. Одатле су могућа два решења: $4312+3421$, $4321+3412$.

258. Поделом помоћу 3 праве на 6 квадрата добијамо фигуру као на слици. Одавде видимо да је обим правоугаоника једнак збиру 10 страница квадрата. Дакле, $10\cdot a=120$, тј. $a=12\,\mathrm{cm}$. Обим квадрата је $4\cdot a=48\,\mathrm{cm}$.

259. а) 8, б) 12, в) 6, г) 1.



Сл. уз зад. 258



Сл. уз зад. 260

260. Види слику.

261. Највећи двоцифрени прост број облика $2n+1$, при чему је и n прост број, јесте 83 (јер је $2\cdot41+1=83$). Значи, бројеви n могу бити: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Бројеви који се завршавају са 7 не испуњавају услов да је и $2n+1$ прост. Провером закључујемо да услове задатка испуњава 7 парова: 2 и 5, 3 и 7, 5 и 11, 11 и 23, 23 и 47, 29 и 59, 41 и 83.

262. Како Пеца целу пицу поједе за 15 минута, то значи да за 1 минут поједе 1/15 пице. Неца и Пеца заједно поједу пицу за 6 минута, што значи да за 1 минут поједу 1/6 пице. Неца за 1 минут поједе $\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}$ пице. Дакле, Неца целу пицу поједе за 10 минута.

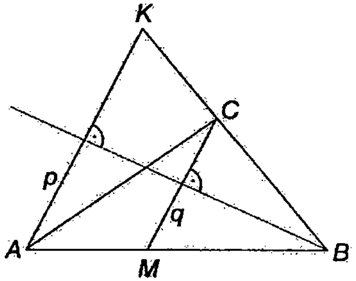
263. Како је $2009=7\cdot7\cdot41$, то је збир тих простих бројева $7+7+41=55$.

264. $\alpha=\beta$ (унакрсни углови); $\beta=\gamma$ (углови са паралелним крацима). Сада је $\alpha+\beta+\gamma=2009'$, $3\alpha=2009'$, одакле је $\alpha=669'40''=11°9'40''$.

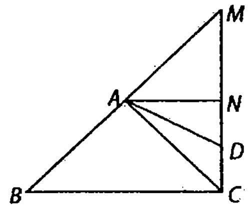
265. Означимо „снагу" миша са m. Тада мачка има „снагу" $6m$, Жућа $5\cdot6m=30m$, унука $4\cdot30m=120m$, баба $3\cdot120=360m$ и деда $2\cdot360m=720m$. Дакле, њихова укупна „снага" је $1237m$, па треба позвати 1237 мишева.

266. Важи $-\frac{1}{2}<a<-\frac{5}{12}$, тј. $-\frac{6}{12}<a<-\frac{5}{12}$ (*). Проширивањем са 2 добијамо $-\frac{12}{24}<a<-\frac{10}{24}$, па је $-\frac{11}{24}$ једно решење. Проширивањем неједнакости (*) за 3 добијамо решење $-\frac{17}{36}$, а проширивањем са 4 и решење $-\frac{23}{48}$.

267. Нека права p садржи тачку A и нормална је на симетралу s угла ABC и нека права q садржи тачку C и нормална је на симетралу s (слика). Како права p сече праву BC у тачки K, то је троугао ABK једнакокрак и $AB=BK$. Слично, права q сече праву AB у тачки M, па је троугао BMC једнакокрак и $MB=BC$. Следи да је $AB=BK=BC+CK=MB+CK=13\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 267



Сл. уз зад. 274

268. Двоцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пишу се цифрама 6 и 7 и има их два: 67 и 76. Троцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пише се цифрама 1, 6, 7 или 2, 3, 7 и има их 12: 167, 176, 617, 671, 716, 761, 237, 273, 327, 372, 723, 732. Четвороцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пишу се цифрама 1, 1, 6, 7 или 1, 2, 3, 7 и има их 12: 1167, 1176, 1617, 1671, 1716, 1761, 1237, 1273, 1327, 1372, 1723, 1732. Дакле, укупно 26 бројева.

269. За трећу страницу троугла c важи $2009-2008<c<2009+2008$, односно $1<c<4017$. Најмањи обим је $O=4019\,\text{cm}$ за $c=2\,\text{cm}$, а највећи обим је $O=8033\,\text{cm}$ за $c=4016\,\text{cm}$.

270. Могуће вредности збира три броја из скупа $\{1,0,1\}$ су од -3 до 3, тј. то је укупно 7 различитих вредности. Како у табелу морамо да упишемо 8 различитих вредности, закључујемо да је бројеве немогуће уписати на тражени начин.

271. $\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}=\frac{8^{20n}}{32^{12n}}=\frac{(2^3)^{20n}}{(2^5)^{12n}}=\frac{2^{60n}}{2^{60n}}=1.$

272. $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}=|x+1|-|x-1|+2\sqrt{3}$. Заменом вредности за x имамо $|2-\sqrt{3}+1|-|2-\sqrt{3}-1|+2\sqrt{3}=|3-\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|+2\sqrt{3}=3-\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{3}=4$.

273. Површина једнакостраничног троугла је $P_t=9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Полупречник уписаног круга у овај троугао је $r=\sqrt{3}\,\text{cm}$. Дијагонала квадрата једнака је пречнику круга, $d=2\sqrt{3}\,\text{cm}$. Површина квадрата ће бити $P_k=6\,\text{cm}^2$. Да бисмо одредили који део површине заузима површина квадрата, поделићемо површину троугла површином квадрата и добијамо $2\sqrt{3}/9$.

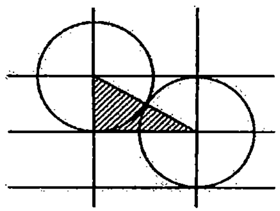
274. Означимо пресечну тачку правих AB и CD са M, а подножје нормале из A на CD са N. $\triangle BCM$ је једнакокрако правоугли, па је $MC = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и $BM = 8\,\mathrm{cm}$. Како је $AB = 4\,\mathrm{cm}$, тачка A је средиште хипотенузе и $AN = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ (средња линија $\triangle BCM$). Сада је N средиште дужи MC, и $NC = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Из правоуглог троугла AND рачунамо да је $AD = \sqrt{10}\,\mathrm{cm}$. Сада је $O_{ABCD} = (4+5\sqrt{2}+\sqrt{10})\,\mathrm{cm}$. Површину рачунамо као $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = 8\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$.

275. Ако је на почетку у реду о коме је реч село n гледалаца, онда је првом „попуном“ у ред село још $n-1$, другом попуном још $2n-2$ и трећом „попуном“ још $4n-4$ гледалаца, тако да је $n + (n-1) + (2n-2) + (4n-4) = 2009$, одакле је $n = 252$.

276. За $x > 0$ имамо $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = |x + 6x| = 7x = 2009$, одакле је $x = 287$. За $x < 0$ имамо $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = |x - 2x| = -x = 2009$, одакле је $x = -2009$.

277. Мора бити $b \neq 0$ (као именилац разломка) и $a \neq 0$ (јер је производ различит од 0). Дакле, $c = 0$ и $\dfrac{a(-b)}{b} > 0$, одакле је $-a > 0$, тј. $a < 0$. Одавде је $b > 0$.

278. Очигледно да је растојање између хоризонталних правих $10\,\mathrm{cm}$. Растојање између вертикалних правих добијамо применом Питагорине теореме на шрафирани троугао са слике чија је хипотенуза $20\,\mathrm{cm}$ и једна катета $10\,\mathrm{cm}$, па је тражено растојање $10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 278

279. Како је

$6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36 = 36(6^{2n} - 2^{n+1} \cdot 3^n + 1) = 36(6^{2n} - 2 \cdot 6^n + 1) = 36(6^n - 1)^2$,

и како је $6^n - 1$ дељиво са 5, следи да је дати број дељив са $36 \cdot 25 = 900$.

280. Нека је a основна ивица, а H висина призме. Тада је основна ивица нове призме $3a$, а висина $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)H$. Како је запремина нове призме већа за $p\%$ у односу на првобитну, добијамо да је

$$6\,\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{p}{100}\right)H = .\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,H.$$

Следи да је $9\left(1 - \dfrac{p}{100}\right) = 1 + \dfrac{p}{100}$, па је $p = 80$. Површина омотача нове призме је $0{,}6(6aH)$, што значи да се површина омотача смањила за 40%.

281. $6027 \cdot (287 - 2009 : 7) = 0$

282. Прва цифра четвороцифреног броја мора бити 1, да би збир био 2009, па је и последња цифра 1. Последња цифра троцифреног броја мора бити 8, а самим тим и прва. Како се збир броја 8 и неког броја завршава са 0, тај број мора бити 2 или 1 (ако постоји пренос при претходном сабирању). Дакле, могући четвороцифрени бројеви су 1221 или 1111. Ако је четвороцифрени број 1221, тада је $2009 - 1221 = 788$, а ово не може бити тражени троцифрени број. Ако је четвороцифрени број 1111, тада је тражени троцифрени број $2009 - 1111 = 898$, што јесте решење.

283. Ако је била једна бубамара са 7 тачкица, тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 83, што је немогуће. Ако је било две бубамаре са 7 тачкица, тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 76, што је могуће. Најмање је могло да буде две бубамаре са 7 тачкица.

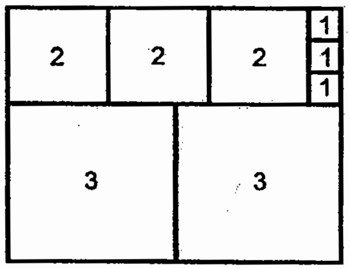
284. Ако је површина најмањег квадрата $4\,\mathrm{cm}^2$, онда је његова страница $2\,\mathrm{cm}$. Страница квадрата 3 је два пута већа од странице квадарата 1 и она је $4\,\mathrm{cm}$. Страница квадрата 4 једнака је збиру дужина страница квадрата 3 и 2 и она је $6\,\mathrm{cm}$. Страница квадрата 5 једнака је збиру страница квадрата 1, 2 и 4 и она је $10\,\mathrm{cm}$. Дакле, ширина правоугаоника једнака је страници квадрата 5, а дужина је једнака збиру дужина страница квадрата 4 и 5, а то је $16\,\mathrm{cm}$. Обим правоугаоника је $52\,\mathrm{cm}$.

285. Нека је $a = 5\,\mathrm{cm}$ и $b = 10\,\mathrm{cm}$. Како је збир свих ивица $4 \cdot (a+b+c)$, имамо да је $4 \cdot (a+b+c) = 140$. Одавде добијамо да је $c = 20\,\mathrm{cm}$. Како је $P = 2 \cdot (ab + bc + ac)$, то је $P = 700\,\mathrm{cm}^2$.

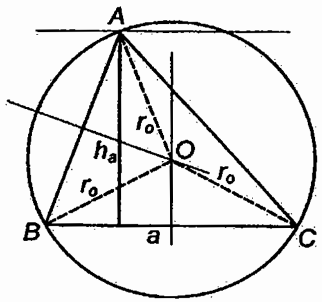
286. Прва, односно последња цифра умањеника може бити 3 или 2 да би разлика била 2009. Ако је она 3, онда последња, а самим тим и прва, цифра умањиоца мора бити 4. Међутим, тада разлика не може бити 2009. Дакле, умањеник почиње и завршава се цифром 2, тј. 2**2 − *** = 2009.
Сада прва и последња цифра умањиоца морају бити 3. Да би разлика неког броја и броја 3 била 0, тај број мора бити 3 или 4 (због претходног одузимања). Ако је умањеник 2442, умањилац је тада 433 што није тражено решење. Ако је умањилац 2332, умањилац је тада 323 што јесте тражено решење. Дакле, решење је $2332 - 323 = 2009$.

287. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\right) : \dfrac{1}{6027} = 2009.$

288. Обим квадрата 1 је $2\,\mathrm{cm}$, па је његова страница $0{,}5\,\mathrm{cm}$ (слика). Страница квадрата 2 је три пута већа од странице квадрата 1, па је она $1{,}5\,\mathrm{cm}$. Две странице квадрата 3 имају исту дужину као збир три странице квадрата 2 и једне страница квадрата 1, па је страница квадрата 3 једнака $2{,}5\,\mathrm{cm}$. Дакле, дужина правоугаоника је $5\,\mathrm{cm}$, а ширина $4\,\mathrm{cm}$. Површина правоугаоника је $20\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 288



Сл. уз зад. 292

289. Збир бројева B, C, F и G је једнак збиру бројева E, F, G и H. Означимо број B са x. Слово E ће имати вредност $x+\frac{1}{12}$. Слично одређујемо и вредност слова D. Разлика збира бројева B, C, F, G и збира бројева C, D, G, H је $\frac{1}{2}$, па је $D = x + \frac{1}{4}$. Знамо да је збир бројева A, B, C и D једнак збиру бројева E, F, G и H, $x + \frac{1}{3} + 1 + x + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{12} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Из једначине добијамо $x = \frac{1}{4}$. На крају, $B = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{2}$, $E = \frac{1}{3}$.

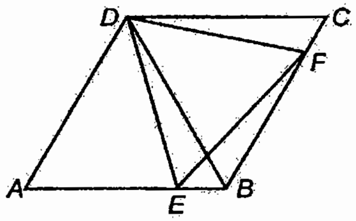
290. Велика казаљка за 1 минут опише угао од $6°$, мала $0{,}5°$. Дакле, сваког минута угао између мале и велике казаљке се смањи за $5{,}5°$. Ако са x означимо број тражених минута, треба да решимо једначину $180° - 5{,}5° \cdot x = 70°$. Решење једначине је $x = 20$, па је тражено решење 20 минута.

291. Растављања броја 2009 су $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Како ниједан од бројева 7 и 287 није квадрат неког целог броја, добијамо да је $x^2 = 49$ и $|y| = 41$ или $x^2 = 1$ и $|y| = 2009$. Дакле, сва решења су: $(x, y) \in \{(7, 41), (7, -41), (-7, 41), (-7, -41), (1, 2009), (1, -2009), (-1, 2009), (-1, -2009)\}$.

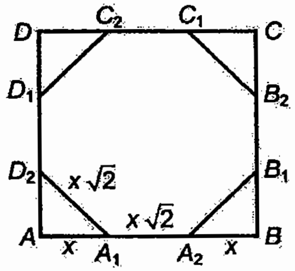
292. Нека је O центар описане кружнице (слика). Троугао BCO је једнакокрак и познате су нам све његове странице, па га можемо конструисати. Тачка A се налази на правој која је паралелна правој на којој је страница a и на растојању h_a од ње и налази се на удаљености r_o од тачке O. Теме A је одређено пресеком поменуте праве и кружнице.

293. Ако је x мушкараца у браку, онда је и x жена у браку, па на острву живи $\frac{4x}{3}$ мушкараца и $\frac{3x}{2}$ жена. Острво има укупно $\frac{17x}{6}$ становника. У браку је $2x$ становника, а $\frac{5x}{6}$ становника није, а то је $\frac{5}{17}$ становника.

294. Како је $\measuredangle BAD = 60°$ и $AB = AD$, то је $\triangle ADB$ једнакостраничан и $\measuredangle ADB = 60°$ (слика). Аналогно је и $\measuredangle DBC = 60°$. Сада је $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ ($AD = BD$, $AE = BF$, $\measuredangle DAB = \measuredangle DBC$), па је $DE = DF$ и $\measuredangle ADE = \measuredangle BDF$. Како је $DE = DF$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle EDB + \measuredangle BDF = \measuredangle EDB + \measuredangle ADE = \measuredangle ADB = 60°$, то је троугао DEF једнакостраничан.



Сл. уз зад. 294



Сл. уз зад. 299

295. Да би збир 3 броја био паран, сва три морају бити парна или један паран, а два непарна. У сваком случају један од ова 3 броја је паран. Збир преостала 2 броја је непаран, а то је могуће само ако је 1 паран, а 1 непаран. Дакле, и од преостала 2 броја један је сигурно паран. Како су сада 2 броја сигурно парна, а сваки паран број је дељив са 2, то је производ ових 5 бројева дељив са 4.

296. $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^2)^9 + 2^{10} \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9)^2 + 2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2$.

297. Обим правоуглог троугла је $O = a + b + c = 36\,\mathrm{cm}$. Како је $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, то додавањем броја 1 левој и десној страни добијамо $\frac{a+b+c}{c} = \frac{12}{5}$. Заменом $a + b + c = 36$ у претходну једнакост добијамо $\frac{36}{c} = \frac{12}{5}$, одакле је $c = 15$. Сада из $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ закључујемо да је $a + b = 21$, а $a^2 + 2ab + b^2 = 441$. На основу Питагорине теореме је $a^2 + b^2 = 225$, па заменом у претходну једнакост добијамо $ab = 108$. Како је $P = \frac{ab}{2}$, то је тражена површина $54\,\mathrm{cm}^2$.

298. За $n = 1$ је $m = 58$, за $n = 2$ је $m = 59$, за $n = 3$ је $m = 63$, па n није 1, 2 или 3. За $n = 4$ је $m = 81 = 9^2$. Како је за $n > 4$ цифра јединица броја m једнака 7, само број 4 испуњава услове задатка.

299. Троуглови које смо одсекли су једнакокрако правоугли (слика). Означимо катету тог троугла са x. Питагорином теоремом добијамо да је стра-

ница осмоугла $x\sqrt{2}$. Како је страница a квадрата састављена од две катете троугла и једне странице осмоугла, то је $a = 2x + x\sqrt{2}$. Сада је $x = \dfrac{10}{2+\sqrt{2}} = 5(2-\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$.
Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површине троуглова које смо одрезали, па је

$$P = P_k - 4\cdot P_t = 100 - 4\,\frac{25(2-\sqrt{2})^2}{2} = 200(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2.$$

300. Једна цифра је 5, а друга мора бити дељива са 3 (дакле, 3, 6 или 9).
1) Ако је једна цифра 5, друга дељива са 3, а трећа није дељива ни са 3 ни са 5, укупан број могућности је $6\cdot3\cdot5 = 90$ (3 цифре на 3 позиције можемо распоредити на 6 начина, 3 цифре су дељиве са 3 и 5 цифара није дељиво ни са 3 ни са 5).
2) Ако је једна цифра 5, а свака од две преостале цифре је дељива са 3, укупан број могућности је $3\cdot3\cdot3 = 27$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина и за сваку од преостале 3 цифре имамо 3 могућности).
3) Ако су 2 цифре 5, а трећа дељива са 3, укупан број могућности је $3\cdot3 = 9$ (цифру дељиву са 3 можемо распоредити и одабрати на по 3 начина).
Дакле укупан број могућности је $90 + 27 + 9 = 126$.

301. $A+\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD} = 1111\cdot A+111\cdot B+11\cdot C+D = 2009$. Одавде је $A = 1$. Сада је $111\cdot B + 11\cdot C + D = 898$. Како је $11\cdot C + D \leqslant 107$, то је $791 \leqslant 111\cdot B \leqslant 898$, па је $B = 8$. Сада је $11\cdot C + D = 10$. Одавде је једино могуће да је $C = 0$, али је тада $D = 10$ (што је немогуће јер је D цифра) па дати ребус нема решења.

302. Основна ивица пирамиде је дијагонала стране коцке и једнака је $a\sqrt{2}$, а бочна ивица пирамиде је половина дијагонале коцке, тј. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Сада Питагорином теоремом добијамо да је висина коцке $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Дакле,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{12}.$$

303. Посматрајмо једнакост $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c) = (a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$. Сваки од сабирака можемо записати у облику, на пример, $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$. Производ три узастопна природна броја је увек дељив са 6, па је и збир три сабирка на десној страни једнакости дељив са 6. Доказали смо да је разлика дељива са 6, а како је умањилац, по претпоставци, дељив са 6, то је и умањеник $a^3 + b^3 + c^3$ дељив са 6, што је и требало доказати.

304. Једна цифра мора бити 5, а производ друге две мора бити дељив са 4. Могућа су три случаја: а) ако су две цифре парне, онда таквих бројева има $3\cdot4\cdot4$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина, а на свако од преостала два места можемо записати било коју од цифара 2, 4, 6, 8); б) ако је једна од преостале две цифре дељива са 4, а друга непарна и различита од 5, онда таквих бројева има $6\cdot2\cdot4$; в) ако је једна цифра 5, а друга дељива са 4 таквих има $3\cdot2$. Дакле, тражених бројева има 102.

305. Како је $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABM} = P_{\triangle BCD}$ и $P_{\triangle APD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABP} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle ABP} = P_{\triangle BMP}$, то је $P_{\triangle ABP} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle APD} = P_{\triangle BCD} - P_{\triangle BMP} = P_{\triangle MDP} + P_{\triangle BCM}$.

306. Како је $2009 = 1\cdot7\cdot287 = 1\cdot41\cdot49 = 1\cdot1\cdot2009 = 7\cdot7\cdot41$, то је

$$\begin{aligned}2009 = 1\cdot7\cdot287 &= (-7)\cdot(-1)\cdot287 = (-287)\cdot(-1)\cdot7 = (-287)\cdot(-7)\cdot1\\ &= 1\cdot41\cdot49 = (-41)\cdot(-1)\cdot49 = (-49)\cdot(-1)\cdot41 = (-49)\cdot(-41)\cdot1\\ &= (-2009)\cdot(-1)\cdot1 = (-41)\cdot(-7)\cdot7.\end{aligned}$$

Дакле, укупно има 10 тражених разлагања.

307. Ако су 2 темена плаве боје, а једно црвене, таквих троуглова има $6\cdot5 = 30$, а ако су 2 темена црвене боје, а једно плаве, таквих троуглова има $10\cdot4 = 40$. Дакле, укупан број тражених троуглова је 70.

308. Означимо суму новца коју је Вера уложила са x. Камата коју је добила на 25 000 динара је $25000\cdot p\%$. Камата коју је добила на преостали износ је $(x-25000)\cdot(p+2)\%$. Како је укупна камата $x\cdot(p+2)\%$, суму коју је Вера уложила добијамо решавањем једначине

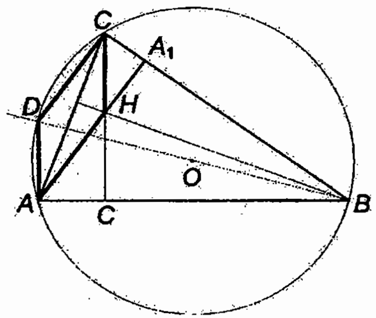
$$25000\cdot p\% + (x-25000)\cdot(p+2)\% = x\cdot(p+2)\%,$$

одакле је $x = 31\,250$ динара.

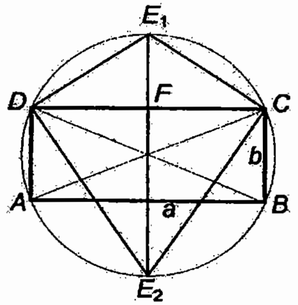
309. Нека је C_1 подножје нормале из темена C на страницу AB, а A_1 подножје нормале из темена A на страницу BC (слика). Како је око троугла DAB описана иста кружница као око троугла ABC и O је средиште странице DB, то је троугао DAB правоугли и $\measuredangle DAB = \measuredangle CC_1B = 90^\circ$, одакле следи да је $DA \parallel CH$. Из истог разлога је и $\measuredangle DCB = \measuredangle AA_1B = 90^\circ$, одакле је $DC \parallel AH$. Сада имамо да су наспрамне странице четвороугла $AHCD$ паралелне, па је овај четвороугао паралелограм.

310. Збир 3 узастопна цела броја је облика $(n-1)+n+(n+1) = 3n$. Дакле, „леп“ број је облика $3n$ и при томе је n непаран број. Посматрајмо 2 „лепа“ броја $3n$ и $3m$.
а) Збир ових бројева је $3n + 3m = 3(n+m)$. Како су n и m непарни бројеви, њихов збир је паран, па је и $3(n+m)$ паран број. Због тога збир два лепа броја није леп број.
б) Производ ових бројева је $3n\cdot3m = 9nm$. Он је непаран и може се записати у облику $9nm = (3nm-1) + 3nm + (3nm+1)$ па јесте леп број.

311. $(2a+3b)\cdot(3a=2b) = 6(a^2+b^2) + 13ab$. Како је први сабирак дељив са 13, а у другом сабирку је један чинилац број 13, то је и цео збир дељив са 13.



Сл. уз зад. 309



Сл. уз зад. 312

312. Површина правоугаоника $ABCD$ је ab. Разликујемо два положаја тачке E (E_1 и E_2, слика).

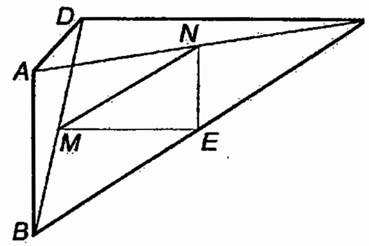
i) Висина троугла CDE_1 је $E_F = 1 - \frac{b}{2}$, па је његова површина $ab = \frac{1}{2}a\left(1 - \frac{b}{2}\right)$, одакле добијамо да је $b = \frac{2}{5}$.

ii) Висина троугла CDE_2 је $E_2F = 1 + \frac{b}{2}$, па је његова површина $ab = \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{b}{2}\right)$, одакле добијамо да је $b = \frac{2}{3}$.

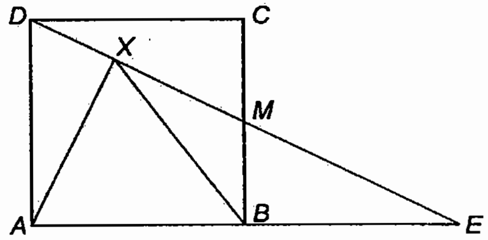
313. $\sqrt{x} = \sqrt{2009} - \sqrt{y}$. Квадрирањем ове једнакости добијамо $2\sqrt{2009y} = 2009 + y - x$. $2 \cdot 7\sqrt{41y}$ је, дакле, природан број, па је $y = 41k^2$ за неко цело k. Сада је $\sqrt{x} = \sqrt{41 \cdot 7^2} - k\sqrt{41}$, тј. $\sqrt{x} = (7-k)\sqrt{41}$. Заменом могућих вредности $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ добијамо тражена решења: $(x, y) \in \{(2009,0), (1476,41), (1025,164), (656,369), (369,656), (164,1025), (41,1476), (0,2009)\}$.

314. Нека је E средиште странице BC, M средиште дијагонале BD и N средиште дијагонале AC (слика). ME је средња линија троугла BCD па је $ME \parallel CD$ и $ME = \frac{1}{2}CD = 4\,\text{cm}$. Аналогно је NE средња линија троугла ABC па је $NE \parallel AB$ и $NE = 3\,\text{cm}$. Како је $AB \perp CD$, то је и $NE \perp EM$, па је троугао MEN правоугли. Применом Питагорине теореме добијамо да је $MN = 5\,\text{cm}$.

315. Претпоставимо да је $a > b > c > d$. Тада су све разлике које је Воја направио $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$. Како је $(a-b)+(b-c)+(c-d) = a-d$, то бар једна разлика мора да буде једнака збиру неке три. Како од понуђених разлика ниједна не може да се представи као збир 3 неке друге, то је Вера у



Сл. уз зад. 314



Сл. уз зад. 319

праву и Воја је погрешио у рачуну.

316. Почетну једнакост можемо трансформисати у облик

$$\left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \frac{a^2}{4} = 0,$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Како су сви сабирци ненегативни, збир је нула само ако је сваки сабирак једнак нули, одакле добијамо $a = b = c = d = 0$.

317. Уочимо дијагонални пресек пирамиде и део овог пресека који се налази у горњој коцки (два једнакокрака троугла). Означимо основицу већег троугла са d, а мањег са d_1. Висина већег троугла је $\frac{3}{2}a$, а мањег $\frac{a}{2}$. Применом сличности на ова два троугла имамо да је $d_1 = \frac{d}{3}$. Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot d}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{a^3}{2}$. Запремина дела пирамиде у горњој коцки је

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{d_1 \cdot d_1}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot d}{18} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{a^3}{54}.$$

Однос запремина је $V_1 : V = 1 : 27$.

318. Једно решење је $x = 1$. Ако је $x < 1$, тада је $x^{2009} < 1$, па је и $kx^{2009} + 1 < k + 1$, за свако k, односно $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} < 1$. Како чланова облика $\frac{kx^{2009}+1}{k+1}$ има тачно n, њихов збир ће увек бити мањи од n, па у случају $x < 1$ задатак нема решења. Аналогно, у случају $x > 1$ је $x^{2009} > 1$, па је за свако k испуњено $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} > 1$. Како оваквих чланова има n, њихов збир ће увек бити већи од n, па задатак ни у овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $x = 1$.

319. Нека је E пресечна тачка правих DM и AB (слика). Троуглови DMC и BME су подударни (УСУ) па је $BE = a$. XB је тежишна дуж која одговара хипотенузи правоуглог троугла AEX, па је $AB = XB = a$. Троуглови ADX и DMC су слични (сви углови су им једнаки), па имамо да је $AX : AD = DC : DM$. Како је $AD = DC = a$ и $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, добијамо да је $AX = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$. Дакле, тражени обим је

$$O = 2a + \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 2a\Big(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

320. Нека је $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$. Како је $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+2}$, за свако n, то је $A > \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009} = \frac{1}{2009}$, тј. $A > \frac{1}{2009}$.
Како је $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, то је

$$A < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009}\cdot\frac{1}{2009} = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2009}.$$

Сада је $A^2 < \frac{1}{2009}$, тј. $A < \sqrt{\frac{1}{2009}}$, што је и требало доказати.

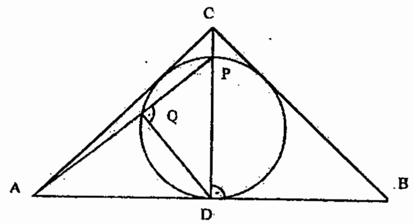
321. Нека је $a^2 + 2nb^2 = c^2$, $c \in \mathbf{N}$. Тада је $c^2 - a^2 = 2nb^2$ и закључујемо да је $c > a$ и да су c и a исте парности. Како је $nb^2 = \frac{c^2 - a^2}{2}$, то је

$$a^2 + nb^2 = a^2 + \frac{c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

Како су a и c исте парности, то су бројеви $a + c$ и $c - a$ парни, па су $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ природни бројеви и следи тврђење задатка.

322. Потребно је наћи однос $PQ : QA$. Како је $\angle QPD = \angle DPA$, правоугли троуглови QPD и DPA су слични и добијамо однос $PQ : QD = PD : AD$ (слика). Аналогно, из сличности троуглова QDA и DPA следи однос $DQ : QA = PD : AD$. Множењем ових односа добијамо

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{PQ}{QD}\cdot\frac{DQ}{QA} = \left(\frac{PD}{AD}\right)^2.$$



Сл. уз зад. 322

Означимо страницу једнакокрако-правоуглог троугла ABC са a. Тада је $AD = a\sqrt{2}/2$ и $PD = 2r$, где је r полупречник уписане кружнице. Из формуле $2S_{ABC} = r(a+b+c)$ добијамо $r = \frac{a^2}{a + a + a\sqrt{2}} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Коначно, тражени однос је једнак

$$\frac{PQ}{QA} = \left(\frac{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = 4(\sqrt{2}-1)^2 = 4(3 - 2\sqrt{2}).$$

323. Обојимо таблу шаховски црно-бело. Онда ниједан жетон не мења боју при померању на дијагонално поље. Докажимо да на свакој од боја остају бар 2 жетона. Нумеришимо вертикале бројевима од 1 до n. У сваком кораку жетон који се налази на црном пољу на вертикали пређе на црно поље вертикале са парним редним бројем. Такође важи и обрнуто. Како се на почетку жетони налазе на црним пољима и парних и непарних вертикала, то ће у сваком кораку бити бар 2 заузета црна поља. Слично се добија да ће у сваком кораку бити заузета бар два бела поља, па су у сваком тренутку заузета бар 4 поља табле. Докажимо да је ову вредност могуће постићи. Померајмо жетоне у сваком кораку ка угаоној подтабли 2×2 (произвољно изабраној). Ако се неки жетон већ налази у њој, ми га можемо оставити у њој одговарајућим дијагоналним померањем. Самим тим после коначно много корака само 4 поља табле ће бити заузета.

324. *Прво решење.* Број је дељив са 11 ако и само ако је разлика суме цифара на парним и непарним позицијама дељива са 11. Доказаћемо општије тврђење: ако се у запису $(2n+1)$-цифреног броја појављују само ненула цифре a и b, тада је могуће изостављањем само једне цифре добити $2n$-цифрени број, код којег је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. Уколико је полазни број облика $\overline{abab\ldots baba}$, тада брисањем средње цифре добијамо симетричан број, за који важи да је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. У осталим случајевима, полазни $(2n+1)$-цифрени број садржи бар један пар суседних цифара које су једнаке. Сада бришемо све парове суседних цифара које су једнаке aa или bb, док не добијемо број са непарним бројем цифара код којег су сваке две узастопне цифре различите. Овај случај смо већ решили, па можемо одредити цифру чијим избацивањем добијамо број који има једнаку суму цифара на парним и непарним позицијама. Када вратимо неки пар узастопних једнаких цифара aa, збир цифара и на парним и на непарним позицијама се увећава за a, односно збирови цифара на парним и непарним позицијама остају једнаки. Када вратимо све парове једнаких цифара, суме цифара на парним и непарним позицијама у $2n$-цифреном броју су једнаке, чиме смо комплетно решили задатак.

Друго решење. Задатак је могуће решити применом математичке индукције.

За $n = 1$, лако проверавамо све случајеве. Када су сваке две узастопне цифре различите, тражену цифру налазимо као у претходном решењу. У другом случају, постоје две суседне једнаке цифре у $(2n+1)$-цифреном броју. Када их избацимо, на основу индуктивне претпосатвке налазимо цифру коју можемо избацити из $(2n-1)$-цифреног броја, тако да имамо једнак збир цифара на парним и непарним позицијама. Враћањем две једнаке цифре, завршавамо задатак као у претходном решењу.

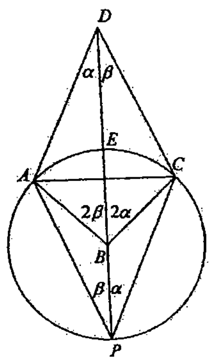
325. Услов $\overline{AB} \mid \overline{A0B}$ је еквивалентан услову $10A+B \mid (10(10A+B) - (100A+B))$, односно $10A+B \mid 9B$. За $B=0$, цифра A може бити произвољна и различита од нуле ($10A$ се садржи у нули). Непосредно се проверава да за $B \in \{1,2,3,4,6,7,9\}$ не постоји A које задовољава услов задатка. На пример, за $B=4$, $10A+4$ се не садржи у 36 ни за једну цифру A; слично се проверава за остале вредности цифре B. Дакле, тражени двоцифрени бројеви су: 10, 15, 18, 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80 и 90.

326. Нека је S тражени подскуп са 1005 бројева. Приметимо да за сваки број n осим 2009 и 1005, постоје тачно два броја који у збиру са n дају 2009 или 2010. Поређајмо бројеве од 1 до 2009 на следећи начин

$$2009, 1, 2008, 2, 2007, 3, \ldots, 1007, 1003, 1006, 1004, 1005.$$

Збир свака два узастопна броја у низу је једнак 2009 или 2010. Према томе, никоја два узастопна броја не могу да буду у S. Како је $|S| = 1005$, следи да 2009 мора припадати скупу S. Аналогно показујемо да бројеви 2008, 2007, ..., 1006, 1005 морају припадати S, па је подскуп S јединствено одређен, $S = \{2009, 2008, 2007, \ldots, 1006, 1005\}$.

327. Нека је $\angle ADB = \alpha$, $\angle CDB = \beta$. Тада је $\angle CBD = 2\alpha$, $\angle ABD = 2\beta$. Опишимо кружницу $k(B, BA)$, која ће садржати темена A и C и продужимо дијагоналу BD преко темена B. Права која садржи дијагоналу BD сече кружницу у тачкама E и P (слика). $\angle APE$ је периферијски угао над тетивом AE, па је $\angle APE = \beta$. Аналогно је $\angle CPE = \alpha$. Закључујемо да је четвороугао $APCD$ паралелограм. Зато дијагонала PD полови дијагоналу AC. Сада имамо да је троугао ABC једнакокрак и да дијагонала BD полови страницу AC, па је BD симетрала угла ABC. Због тога је $2\alpha = 2\beta$, односно $\alpha = \beta$ и $\angle AEB = \angle CEB = 90°$. Како у четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC$, једна дијагонала полови другу и дијагонале се секу под правим углом, то је овај четвороугао делтоид.



Сл. уз зад. 327

328. Из услова задатка следи да су бројеви x, y, z већи од 1. Доказаћемо неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

Сређивањем добијамо еквивалентне неједнакости:

$$2(x^3+2) - 3(x^2+1) > 0,$$
$$2(x^3-1) - 3(x^2-1) > 0,$$
$$2(x-1)(x^2+x+1) - 3(x-1)(x+1) > 0,$$
$$(x-1)(2x^2-x-1) > 0.$$

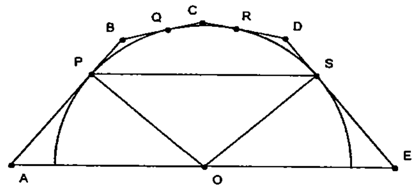
Како је $x - 1 > 0$ и $2x^2 = x^2 + x^2 > x + 1$, неједнакост је доказана. Слично добијамо

$$\frac{1}{y^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

Сабирањем доказаних неједнакости и коришћењем датог услова добијамо тражену неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

329. Нека је O центар круга k. Тада је $BP = BQ$, $CQ = CR$ и $DR = DS$ (тангентне дужи на круг k). Користећи услов $AB + CD = BC + DE$ добијамо да је $AP + BP + CR + DR = BQ + CQ + DS + ES$, а одатле $AP = ES$. Троуглови $\triangle APO$ и $\triangle ESO$ су подударни, јер $AP = ES$, $\angle APO = \angle ESO = 90°$ и $PO = SO$ (полупречници круга k). Одавде је $\angle PAO = \angle SEO$. Из једнакокраког троугла $\triangle POS$ добијамо $\angle OPS = \angle OSP$.



Сл. уз зад. 329

Зато је,

$$\angle APS = \angle APO + \angle OPS = 90° + \angle OPS = 90° + \angle OSP = \angle PSE.$$

Сада из четвороугла $APSE$ закључујемо да је

$$2\angle EAP + 2\angle APS = \angle EAP + \angle APS + \angle PSE + \angle SEA = 360°.$$

Дакле, $\angle EAP + \angle APS = 180°$, па је четвороугао $APSE$ једнакокраки трапез, одакле је коначно $AB \parallel PS$.

330. Напишимо једначину у облику $2^a \cdot 3^b = (c-3)(c+3)$. Ако је $b=0$, лако се налази да мора бити $a=4$ и $c=5$. Ако је $b>0$ добијамо да $3 \mid c^2$, тј. $9 \mid c^2$ и $9 \mid 2^a \cdot 3^b$ одакле је очигледно $b>1$. Нека је $c=3y$. Заменом у једначину добијамо $(y-1)(y+1) = 2^a \cdot 3^{b-2}$. Ако је $a=0$, опет се лако закључује да мора бити $b=3$ и $c=6$. Ако је $a \geq 1$, тада су $y-1$ и $y+1$ парни бројеви па $4 \mid 2^a \cdot 3^{b-2}$, одакле је $a \geq 2$. Дакле, решавамо једначину

$$\frac{y-1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} = 2^{a-2} \cdot 3^{b-2}.$$

Како су $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ узастопни бројеви, они су узајамно прости па су степени бројева 2 и 3. Нека је $m=a-2$ и $n=b-2$. Остаје да размотримо два случаја.

1° $\frac{y-1}{2} = 2^m$ и $\frac{y+1}{2} = 3^n$. Тада је $2^m - 3^n = 1$ и, јасно, $m>n$. Ако је $n=0$, добијамо $m=1$ и $a=3$, $b=2$ и $c=9$. Ако је $n>0$, посматрајући претходну једнакост по $\pmod 3$ закључујемо да је m паран број. Нека је $m=2t$ и опет користећи разлику квадрата добијамо $(2^t-1)(2^t+1) = 3^n$. Имамо да је $(2^t+1)-(2^t-1) = 2$ па мора бити $2^t-1=1$ и $2^t+1=3^n$. Одавде је $t=1$, $m=2$, $n=1$ и $a=4$, $b=3$ и $c=21$.

2° $\frac{y-1}{2} = 3^n$ и $\frac{y+1}{2} = 2^m$. Тада је $3^n - 2^m = 1$ и, јасно, $m>0$. Ако је $m=1$, налазимо да је $n=1$ и $a=3$, $b=3$ и $c=15$. Ако је $m>1$, посматрајући претходну једнакост по $\pmod 4$ закључујемо да је n паран број. Нека је $n=2t$ и опет користећи разлику квадрата добијамо $(3^t-1)(3^t+1) = 2^m$. Имамо да је $(3^t+1)-(3^t-1) = 2$ па мора бити $3^t-1=2$ и $3^t+1=2^{b-1}$. Одавде је $t=1$, $n=2$, $m=3$ и $a=5$, $b=4$, $c=51$.

Провером утврђујемо да су сва решења дате једначине $(a,b,c) \in \{(4,0,5), (0,3,6), (3,2,9), (4,3,21), (3,3,15), (5,4,51)\}$.

331. Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, \quad (1-y)z < \frac{1}{4}, \quad (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Сабирајући ове три неједнакости добијамо

$$(*) \qquad (1-x)y + (1-y)z + (1-z)x < \frac{3}{4}$$

Множећи ове три неједнакости (јер су све стране позитивне) добијамо

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{64}$$

и користећи услов задатка

$$xyz < \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad (1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}.$$

Развијајући израз на левој страни последње неједнакости добијамо

$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx < xyz + \frac{1}{8} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ово је еквивалентно са

$$-(x+y+z)+xy+yz+zx < -\frac{3}{4},$$

тј.

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x = x+y+z-(xy+yz+zx) > \frac{3}{4}.$$

Последња неједнакост је у контрадикцији са (*) па је наша претпоставка погрешна и тврђење је доказано.

332. Сваки пар црвених тачака налази се на највише две јединичне кружнице са центрима у плавим тачкама. Како n црвених тачака формира $\frac{n(n-1)}{2}$ парова, то број плавих тачака није већи од двоструког броја парова црвених тачака, тј. од $n(n-1)$. Дакле, укупан број тачака није већи од $n+n(n-1)=n^2$. Како је $44^2 < 2009$, n мора бити бар 45.

Конструисаћемо конфигурацију тачака која одговара условима задатка и садржи тачно 45 црвених тачака. Распоредимо 45 различитих црвених тачака на дуж дужине 1 и конструишимо међусобне пресечне тачке јединичних кружница са центрима у црвеним тачкама. Обојмо све те тачке сем њих 16 (45^2-2009) у плаво. Све конструисане тачке су различите, јер би у противном неке 3 јединичне кружнице имале заједничку тачку, у којој би пак постојала јединична кружница која би секла почетну дуж у три различите тачке, што је немогуће. Дакле, највећи могући број плавих тачака је $2009-45=1964$.

2010. година

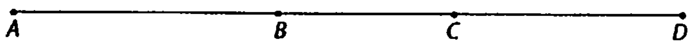
333. Парни бројеви седме стотине у табели су: 606, 610, 644, 688, 700, 674, 622, 630 и 672.

334. а) четири; б) двеста четрдесет два; в) деветсто.

335. 411, 414, 417, 441, 444, 447.

336. 723 се смањи за 396, 732 се смањи за 360, а 273 се смањи за 36. Дакле, највише ће се смањити број 723.

337. Има више начина за решавање задатка. Један начин је следећи:

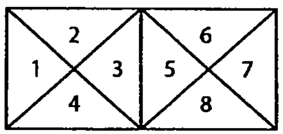


Како је $AC = 25\,\mathrm{cm}$ и $BC = 8\,\mathrm{cm}$, то је $AB = 17\,\mathrm{cm}$. Дужина дужи AD једнака је збиру дужина дужи AB и BD, па је $AD = 38\,\mathrm{cm}$.

338. 35246 се смањује за 990, 42385 се повећа за 9999, 45263 се повећа за 9000, 75234 се смањи за 999. Дакле, највише ће се повећати број 42385.

339. Тражени број добијамо тако што 88888 најпре увећамо за 8620 и добијамо број 97508, а затим овај број умањимо за 17200 и добијемо тражени број 80308.

340. Ако означимо „мале“ троуглове на слици бројевима од 1 до 8, онда можемо уочити 8 „малих“ троуглова, 8 „средњих“ (12,43,14,23,56,78,58,67) и 2 „велика“ (2356, 3458). Дакле, укупно их је 18.



Сл. уз зад. 340

+	4080	7665	6665
2335	**6415**	10000	9000
900	4980	**8565**	7565
2335	**6415**	10000	**9000**

Сл. уз зад. 342

341. Мали квадрат има страницу дужине $2\,\mathrm{cm}$, па је дужина назначене изломљене линије $12 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$.

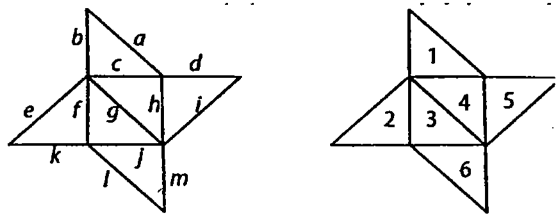
342. В. слику.

343. $4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 16 + 18 = 112$.

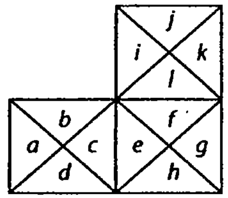
344. $x = 45$, $y = 54$ и $x = 54$, $y = 45$.

345. Ако кроз дату тачку M и центар круга S нацртамо праву a, онда нацртана права сече дати круг $k(S, r)$ у тачкама A и B. Најкраће растојање тачке M од круга је дужина дужи MA, а најдуже дужина дужи MB. Како је AB пречник круга, то је $AB = MB - MA = 8\,\mathrm{cm}$, па је полупречник круга једнак $4\,\mathrm{cm}$.

346. Можемо уочити 13 „малих“ дужи (означене словима на првој слици) и 4 „велике“ дужи (cd, kj, bf, hm) што је укупно 17 дужи. Такође ту је и 6 „малих“ троуглова (означени бројевима на другој слици) и 2 „велика“ троугла (23, 45), што је укупно 8 троуглова.



Сл. уз зад. 346



Сл. уз зад. 350

347. $2009 \cdot 6890 = 13842010$.

348. $a = -11$, $b = -2$, $c = 9$, $d = -11$, $e = -15$.

349. *Први начин.* Како је $a = b - 2$ и $c = b - 1$, то је $a < c < b$, па је $\alpha < \gamma < \beta$.

Други начин. Како је $a = b - 2$ и $c = b - 1$, то је $b - 2 + b + b - 1 = 72$, тј. $b = 25$. Сада је $a = 23$ и $c = 24$, па је $a < c < b$, а онда и $\alpha < \gamma < \beta$.

350. Ако означимо „мале“ троуглове словима (као на слици), онда можемо уочити 12 „малих“ троуглова, 12 „средњих“ (ab, cd, ad, bc, ef, gh, eh, fg, ij, kl, il, jk), 4 „велика“ ($bcef$, $dceh$, $efli$, $gflk$) и 1 „супер“ троугао ($dcehgflk$). Дакле, укупно их је 29.

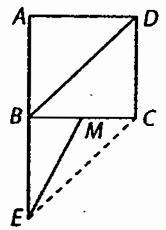
351. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ и како су мајка и ћерка рођене у истом веку, то је једино могуће да мајка има 67 година, а ћерка $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ година.

352. Нека је пресек праве CP и дужи AB тачка D. $\measuredangle APD$ је спољашњи угао троугла APC па је $\measuredangle APD = \measuredangle ACP + \measuredangle CAP$ и $\measuredangle APD > \measuredangle ACP$. Аналогно је и $\measuredangle BPD > \measuredangle BCP$. Сада је $\measuredangle ACB = \measuredangle ACP + \measuredangle PCB < \measuredangle APD + \measuredangle DPB = \measuredangle APB$, одакле следи тврђење.

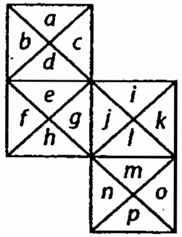
353. а) 6; б) $\sqrt{3}$.

354. Ако са D означимо подножје хипотенузине висине, где је AB хипотенуза, а са E и F подножја нормала из D на катете AC и CB, тада је $CD = 12\,\text{cm}$, $AD = 9\,\text{cm}$, $BD = 16\,\text{cm}$, $DF = 9{,}6\,\text{cm}$ и $DE = 7{,}2\,\text{cm}$.

355. а) Дужина изломљене линије $ABDCME$ је $10+10\sqrt{2}+10+5+5\sqrt{5} = 5(5+2\sqrt{2}+\sqrt{5})\,\text{cm}$. б) $P = 150\,\text{cm}^2$; $O = 10(4+\sqrt{2})\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 355



Сл. уз зад. 356

356. Ако означимо „мале“ троуглове словима као на слици, онда можемо уочити 16 „малих“ троуглова, 16 „средњих“ (ab, cd, ad, bc, ef, gh, eg, fh, ij, kl, ik, jl, mo, np, mn, op), 6 „великих“ ($bdef$, $cdeg$, $hgjl$, $egji$, $klmo$, $jlmn$) и 2 „супер“ троугла ($bdefghjl$, $egjiklmo$). Дакле, укупно их је 40.

357. Потпуни квадрати који су чиниоци броја 45 су 1 и 9. Како је $45 = 5\cdot 9 = 1\cdot 45$ то $45 - n$ мора бити једнако 5 или 45. Дакле, $n = 40$ или $n = 0$.

358. Ако је n број страница многоугла, тада је број његових дијагонала $\frac{n(n-3)}{2}$. Сада је $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$, па је $n = 13$.

359. Како су било која три темена коцке неколинеарне тачке, то ће било које две тачке одређивати једну праву. Према томе укупан број правих је 28.

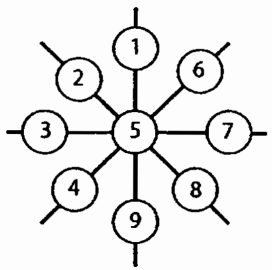
360. Непосредно закључујемо да је П = 1 и А = 9. Сада В може да буде 5, 6, 7 или 8, а у тим случајевима добијамо да одговарајуће вредности за С су 0, 2, 4 или 6. Дакле, сва решења су: $95+95 = 190$, $96+96 = 192$, $97+97 = 194$, $98+98 = 196$.

361. Како је $(x-5)^2 > 0$ за $x \neq 5$, то из скупа решења неједначине $2x-4 > 0$ треба изоставити број 5. Решење неједначине $2x-4 > 0$ је $x > 2$, па је решење полазне неједначине $x \in (2,5) \cup (5,\infty)$

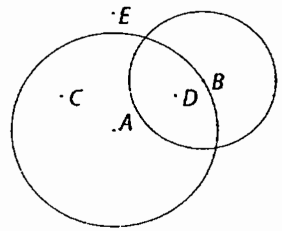
362. Ако са C означимо средиште дужи AB, тада је $CD = 12\sqrt{3}\,\text{cm}$ (висина једнакостраничног троугла) и $EC = 12\,\text{cm}$. Применом Питагорине теореме на троугао CDE добијамо да је $DE = 24\,\text{cm}$.

363. а) Четири стотине деведесет (и) девет. б) две стотине (и) два.

364. Једно решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 364



Сл. уз зад. 365

365. Једно решење је дато на слици.

366. Троцифрени бројеви који се добијају су: 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608 и 609. а) $609 + 69 = 678$; б) Разлика је увек иста и износи 540.

367. Авион је полетео из Москве у 09.20 часова по београдском времену. Како се времена разликују за 2 сата, по московском времену је било 11.20 часова.

368. Има 100 таквих бројева.

369. Страница квадрата је дужине 502 cm, а обим почетног правоугаоника је 1912 cm.

370. а) 5434; б) 1434.

371. Ако са P, D и T обележимо број особа које живе на првом, другом и трећем спрату, редом, тада је: $P + D = 22$, $D + T = 20$. Закључујемо да је $P + D + D + T = 42$, а како је $P + T = D$, то је $3D = 42$. Значи, $D = 14$, $P = 8$ и $T = 6$.

372. Збир бројева у осенченим пољима из прве врсте мора бити једнак збиру осенчених бројева из друге колоне (в. прву слику на следећој страни), па је у средини број 25. Радећи на сличан начин добијамо попуњену табелу као на другој слици.

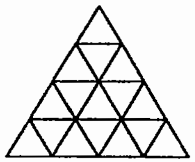
373. Најмањи број је 10 050, а највећи број је 98 490.

374. $\frac{61}{2010} = \frac{305}{10050}$, $\frac{5}{149} = \frac{305}{9089}$. Како је $\frac{305}{10050} < \frac{305}{9089}$, то је $\frac{61}{2010} < \frac{5}{149}$.

26	x	28
	29	

26	21	28
27	25	23
22	29	24

Сл. уз зад. 372



Сл. уз зад. 382

375. Нека је и са леве и са десне стране броја 2009 дописана цифра a. Да би тражени шестоцифрени број $\overline{a2009a}$ био дељив са 12, он мора бити дељив са 3 и 4. Због дељивости са 4, његов двоцифрени завршетак може бити само 92 или 96, па у обзир долазе бројеви 220092 и 620096. Број 620096 има збир цифара $6+2+9+6=23$ и није дељив са 3 па није решење задатка. Како је збир цифара броја 22092 једнак $2+2+9+2=15$, дакле дељив са 3 то је овај број једино решење.

376. Скуп S_1 има 1 елемент, S_2 два елемента, S_3 три елемента, ..., скуп S_{10} има 10 елемената. Како је $1+2+\cdots+9=45$, то унија скупова $S_1, \ldots S_9$ садржи бројеве $1,2\ldots,45$, па је $S_{10}=\{46,47\ldots,55\}$. Збир елемената скупа S_{10} је 505.

377. Угао између сатне и минутне казаљке у 8.00 часова је $120°$. Минутна казаљка се креће 12 пута брже од сатне. Од 8.00 до 8.10 часова минутна казаљка се помери за угао од $60°$, док се сатна помери за 12 пута мањи угао, тј. за $60° : 12 = 5°$. Дакле, угао између сатне и минутне казаљке биће $120°+60°-5°=175°$.

378. Како је a цео број који је делилац бројева -6 и -10, то је $a \in \{1,-1,2,-2\}$. У случајевима када је $a=1$ или $a=-1$, добијамо да је $b\cdot c=60$, што је нетачно. У случају када је $a=2$ имамо да је $b=-3$, $c=-5$ и $a\cdot b\cdot c=30$ што је једно решење задатка. У случају када је $a=-2$, имамо да је $b=3$, $c=5$ и $a\cdot b\cdot c=-30$ што је друго решење задатка.

379. Угао EBC је једнак $90°-60°=30°$. Странице троугла и квадрата су једнаке па је на основу тога троугао EBC једнакокрак ($EB=BC$). Углови на основици EC су по $75°$. $\triangle EBC \cong \triangle EAD$, па је $\measuredangle DEA=75°$. Дакле, $\measuredangle DEC=360°-60°-2\cdot 75°=150°$.

380. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}=\frac{41}{42}+\frac{1}{n}$. Како је $\frac{41}{42}<1$ и $\frac{1}{n}<1$, то је једина могућност $\frac{41}{42}+\frac{1}{n}=1$. Одавде је $n=42$.

381. Од дужи BC, CD и BD најдужа је BD јер је наспрам највећег угла троугла BCD. У троуглу EDB највећа је дуж EB јер је наспрам највећег угла, па је и $EB>DB$. У троуглу ABE највећа је дуж AE јер је наспрам највећег угла, па је и $AE>EB$, одакле закључујемо да је најдужа дуж AE.

382. Не може. Дати једнакостранични троугао можемо поделити на 16 једнакостраничних троуглова странице 1 cm (слика). 16 тачака можемо распоредити у сваки од ових троуглова, док последњу тачку ма где ставили, биће на у једном од 16 троуглова и на растојању мањем од 1 cm од тачке из тог троугла.

383. Нека је $x=0,\overline{1}$. Тада је $10x=1,\overline{1}$. Одузимањем ове две једначине имамо да је $9x=1$ одакле је $x=\frac{1}{9}$. Сада је $\sqrt{0,\overline{1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$ рационалан број.

384. $DE=\sqrt{EC^2-DC^2}=4\,\mathrm{cm}$, $BC=\sqrt{EB^2+EC^2}=13\,\mathrm{cm}$, $AB=\sqrt{EB^2-AE^2}=9{,}6\,\mathrm{cm}$. Дакле, обим трапеза је 36,8 cm и површина 70,56 cm^2.

385. $5^3<2^7$, $(5^3)^{287}<(2^7)^{287}$, $5^{861}<2^{2009}<2^{2010}$, одакле следи да је већи број 2^{2010}.

386. Означимо дечаке са A, B, C и D. Дечак A може да добије само оловке дечака B, C и D. Ако добије оловку дечака B, остала тројица могу на 3 различита начина да распореде оловке. На исти начин се врши расподела ако дечак A узме оловке дечака C или D, па је укупан број начина 9.

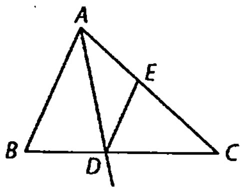
387. Троуглови ADE и DEB имају једнаке висине које одговарају страници AD, односно DB, а како су им и површине једнаке, то је $AD=DB$. Дакле, $AD:DB=1:1$. Троуглови EBC и AEB имају једнаке висине које одговарају страници EC, односно AE, а како им се површине односе као $1:2$, то је $EC:AE=1:2$.

388. $\big||x|+1|+\big|=2010$, $\big||x|+1\big|=2008$, $|x|=2007$, $x=2007$ или $x=-2007$.

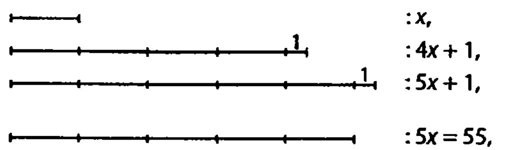
389. $B:M=\sqrt{3}:2$, па је $M=72\,\mathrm{cm}^2$. Основна ивица призме је 12 cm, па заменом у формулу за M налазимо да је $H=2\,\mathrm{cm}$. Запремина призме је $72\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

390. Осам тачака од којих нема четири копланарне одређује 56 равни. Темена коцке формирају 12 четворки копланарних тачака. Свака од ових четворки одређује по 1 раван. Како смо код 56 равни рачунали да свака онаква четворка одређује 4 равни, потребно је од тог броја одузети по 3 равни за сваку четворку копланарних тачака. Дакле, одређено је 20 равни.

391. Ако је E тачка странице AC таква да је $DE \parallel AB$, онда је троугао ADE једнакокрак, а троуглови ABC и EDC су слични (в. слику на следећој страни). Ако је $|AE|=|ED|=x$, онда је $(15-x):15=x:10$. Добијамо $x=6\,\mathrm{cm}$, па је $|AD|<|AE|+|ED|=12\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 391

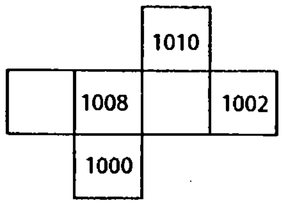


Сл. уз зад. 393

392. Нека је x сума новца која се дели. Први из групе добија $10+\frac{1}{10}(x-10)$ динара. Након прве поделе остало је $\frac{9}{10}x-9$ динара. Други из групе добија $\frac{9}{100}x+\frac{171}{10}$ динара. Како су суме које добијају сви једнаке, то је $\frac{9}{10}x-9=\frac{9}{100}x+\frac{171}{10}$, одакле имамо да је $x=810$ динара. Заменом у једном од два израза за прву или другу особу добијамо да једна особа добија 90 динара, па закључујемо да је било 9 особа.

393. Ако мањи број представимо помоћју дужи x (прва дуж на слици), онда већи број представља друга дуж $(4x+1)$, а њихов збир трећа дуж $(5x+1)$. Збир умањен за остатак 1 је последња дуж, па је $5x=55$, $x=55:5=11$. Мањи број је 11 а већи 45.

394. Посматрамо редом цифре јединица. Ако је цифра јединица једнака 0 или 1, тражени двоцифрени бројеви не постоје. Ако је цифра јединица једнака 2, постоји један двоцифрен број (12). Ако је цифра јединица једнака 3, постоје два броја (13, 23). ... Ако је цифра јединица једнака 9, постоје осам бројева (19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89). Према томе, тражених бројева има $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

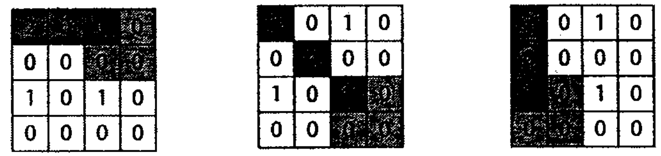


Сл. уз зад. 395

395. Бројеви 1008 и 1010 су фиксирани као на слици. На преостала два места можемо уписати бројеве 1004 и 1006.

396. Број 2010 се може прочитати на 9 начина и то показано, на пример, као на слици.

397. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест $O=(8+18+10+24)-4\cdot 10=20$, $O=20\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 396

398. В. слику.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Сл. уз зад. 398

399. Угао суплементан углу α је $180^\circ-\alpha$. Једначина која се добија је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-180^\circ-\alpha$ Сређивањем добијамо $\frac{7\alpha}{8}+\alpha=180^\circ$, односно $\alpha=96^\circ$.

400. Број је дељив са 9 ако и само ако је његов збир цифара дељив са 9. Највећи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{98765a}$, одакле следи да је $a=1$, јер је $9+8+7+6+5+1=36$. Најмањи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{10234x}$, где је x нека од цифара 5, 6, 7, 8 или 9. Решење је $x=8$.

401. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест $O=(8{,}6+22{,}2+6{,}4+18{,}6)-4\cdot 10=15{,}8$; $O=15{,}8\,\mathrm{cm}$.

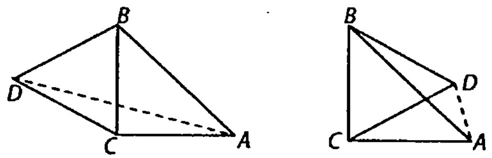
402. Како је $10=2\cdot 5\cdot 1\cdot 1$, то су цифре тражених бројева управо 1, 1, 2 и 5. Бројеви који су мањи од 2009 могу почињати само цифром 1 и то су 1125, 1152, 1215, 1251, 1512, 1521.

403. Сређивањем добијамо $\frac{-2}{-3}+\frac{-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{5}{6}$.

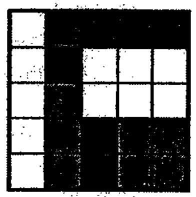
404. Углови од 45° и 75° се могу конструисати: 45° се добија конструкцијом симетрале правог угла, док се 75° добија конструкцијом симетрале угла од 30° и одузимањем од правог угла. Нека је D подножје нормале из темена C. Правоугли троуглови ACD и BCD се могу конструисати, пошто имају познату хипотенузу и још један угао.

405. Како 18 дели $\overline{991a}+\overline{b234}$, цифра a мора бити парна. Следи да 9 дели суму цифара $9+9+1+a+b+2+3+4=28+a+b$. Сада добијамо да је $a+b=8$ или $a+b=17$. Решења су следећи парови бројева $(0,8)$, $(2,6)$, $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,9)$ и $(9,8)$.

406. Троугао ACD је једнакокрак, због $AC = CB = CD$. Темена A и D могу бити са исте или различитих страна праве BC.
1) Темена A и D су са различитих страна праве BC (прва слика). Угао ACD је једнак $90° + 60° = 150°$, па је $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 15°$. Зато је $\measuredangle ADB = 60° - 15° = 45°$.
2) Темена A и D су са исте стране праве BC (друга слика). Угао ACD је једнак $90° - 60° = 30°$, па је $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 75°$. Зато је $\measuredangle ADB = 60° + 75° = 135°$.



Сл. уз зад. 406



Сл. уз зад. 407

407. Правоугаоници чија је једна страница једнака 1, имају димензије 1×1, 1×2, 1×3, 1×4 и 1×5. Правоугаоници чија је мања страница једнака 2 имају димензије 2×2 и 2×3. Тих седам правоугаоника са површинама 1, 2, 3, 4, 5, 4 и 6 имају укупну површину 25. Један могући распоред тих правоугаоника је на слици.

408. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = x^2+2+\frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}+2 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$. Зато је $x+\frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. Слично, из $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2$ следи $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. Сабирањем последње две једнакости је $2x = \frac{10}{3} + \frac{8}{3} = 6$, па је $x = 3$.

409. Нека је растојање суседних типки $x = 12\,\text{mm}$. Из Питагорине теореме растојање између бројева 0 и 1 је једнако $\sqrt{x^2+(3x)^2} = x\sqrt{10}$. Растојање између типки 1 и 1 је једнако 0, док је растојање имеђу типки 1 и 3 је једнако $2x$. Користећи симетрију добијамо да је најкраћа црта која је „повучена прстом" дужине $x\sqrt{10} + 0 + 2x + x\sqrt{10} + x\sqrt{10} + x + x\sqrt{2} + x\sqrt{5} + x\sqrt{5}$, односно $3x\sqrt{10} + 2x\sqrt{5} + x\sqrt{2} + 3x$. Сада процењујемо

$$12(3\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} + 3) > 12(3\cdot 3 + 2\cdot 2{,}2 + 1{,}4 + 3) = 12\cdot 17{,}8 = 213{,}6,$$

па је најкраћа црта дужа од 210 mm.

410. Због симетрије осенчени део је ромб, који има висину 5 cm. Нека је страница паралелограма једнака a. Из Питагорине теореме добијамо $(12-a)^2 + 5^2 = a^2$, односно $a = \frac{169}{24}$. Сада је површина осенченог дела управо једнака $a\cdot h = \frac{169}{24}\cdot 5$, $P = \frac{845}{24}\,\text{cm}^2$.

411. Укупан број дијагонала n-тоугла једнак је $\frac{n(n-3)}{2}$. Из услова задатака добијамо једнакост $\frac{n(n-3)}{2} = n + 2010$. Сређивањем се добија $n(n-5) = 4020 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Бројеви n и $n-5$ дају исти остатак при дељењу са 5, па је производ дељив са 25 или није дељив са 5. Производ $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ је дељив само са 5, па једначина $n(n-5) = 4020$ нема целобројно решење, односно такав многоугао не постоји.

412. Последња цифара броја 44^n је 4 или 6, зависно од тога да ли је n непарно или парно. Према томе последња цифра броја 44^{43} је 4, а последња цифра броја 44^{44} је 6. Како је

$$\frac{44^{44}}{2} = 44^{43}\cdot\frac{44}{2} = 44^{43}\cdot 22$$

и последња цифра броја 44^{43} је 4, последња цифра датог броја је 8.

413. Нека су x и y природни бројеви такви да је $xy = 2(x+y)$. Пребацивањем сабирака на леву страну и додавањем 4 добијамо $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, односно $(x-2)(y-2) = 4$. Како је $4 = 4\cdot 1 = 2\cdot 2$, онда је једно решење $x - 2 = 4$ и $y - 2 = 1$, $x = 6$ и $y = 3$, а друго решење је $x - 2 = 2$ и $y - 2 = 2$, $x = 4$ и $y = 4$. Задатак има два решења, а тражени бројеви су 6 и 3 или 4 и 4.

414. Нека је страница мањих квадрата x, тада је страница већег квадрата $2x$. Због симетрије и Питагорине теореме добијамо $(4x)^2 + (2x)^2 = 2^2$, односно $20x^2 = 4$, па је $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Површина круга је $1^2\pi$, док је површина квадрата једнака $8x^2 + (2x)^2 = 12x^2 = \frac{12}{5}$. Површина дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата је $\pi - \frac{12}{5}$.

415. Једначина праве која садржи координатни почетак и тачку $A(32,76)$ је $y = \frac{76}{32}x = \frac{19}{8}x$. Целобројне тачке на дужи AO имају x координату између 0 и 32. Из горњег услова x мора бити дељиво са 8. Према томе, једине целобројне тачке имају x координате 8, 16, 24 и 32, односно то су тачке $(8,19)$, $(16,38)$, $(24,57)$, $(32,76)$.

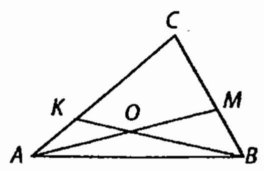
416. Нека је P средиште дужи MN. Због симетрије тачка P се налази на дијагонали основе BD. Угао између равни MND_1 и ABC је управо $\measuredangle DPD_1 = 45°$. Зато је $DP = DD_1 = 10$. Из једнакокрако-правоуглог троугла BMN добијамо да је $BP = PN = PM = \frac{x}{\sqrt{2}}$, где је $BN = BM = x$. Сада је

$BD = 10'ko2 = DP + PB = 10 + \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ и коначно $BN = x = (20 - 10\sqrt{2})$ cm.

417. Сеци сваки пут четвороугао на два четвороугла. После пет сечења добијамо шест четвороуглова који имају 24 темена. Сечењем правоугаоника на два троугла и после троугла на два троугла, добијамо шест троуглова који имају 18 темена.

418. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то је $\{p, q, r, s+t\} = \{2, 3, 5, 67\}$. Како $s + t$ не може бити 2 или 3 јер не постоје прости бројеви s и t чији је збир 2 или 3, то је $s + t = 5$ или $s + t = 67$. Ако је $s + t = 5$ тада су s и t бројеви 2 и 3, а p, q, r узимају вредности из скупа $\{2, 3, 67\}$. У случају $s + t = 67$ нема решења јер ако је један број 2 други је 65, који није прост, а ако су s и t неки други прости бројеви они су непарни, па њихов збир мора бити паран број. Дакле, решења су: $(p, q, r, s, t) \in \{(2,3,67,2,3),\ (2,67,3,2,3),\ (3,2,67,2,3),\ (3,67,2,2,3),\ (67,2,3,2,3),\ (67,3,2,2,3),\ (2,3,67,3,2),\ (2,67,3,3,2),\ (3,2,67,3,2),\ (3,67,2,3,2),\ (67,2,3,3,2),\ (67,3,2,3,2)\}$.

419. Нека се дужи AM и BK секу у тачки O. Ако се ове дужи полове, онда је $\triangle ABO \cong \triangle MKO$ ($AO = OM$, $BO = OK$, $\measuredangle AOB = \measuredangle MOK$, слика) па је $AB = KM$. Аналогно, из подударности троуглова AOK и MOB имамо да је $AK = MB$. Како су наспрамне странице четвороугла $ABMK$ једнаке, он је паралелограм, а како су тачке M и K на страницама троугла, то је немогуће, па дужи AM и BK не могу да се полове.

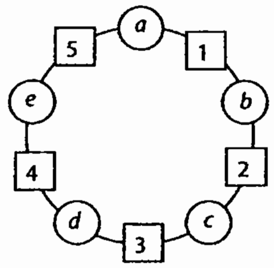


Сл. уз зад. 419

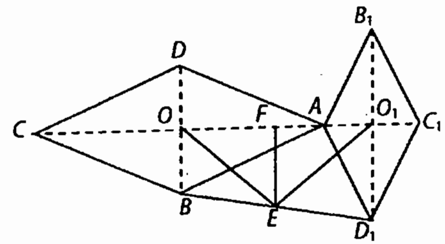
420. Означимо бројеве у кружићима као на слици. Имамо да је: $b = 1 - a$, $c = 2 - b = 1 + a$, $d = 3 - c = 2 - a$, $e = 4 - d = 2 + a$ Како је $a + e = 5$, то је $2 + 2a = 5$, одакле је $a = \dfrac{3}{2}$ па добијамо и остале бројеве: $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{5}{2}$, $d = \dfrac{1}{2}$, $e = \dfrac{7}{2}$.

421. *Први начин.* Како је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ и како дијагонала дели унутрашњи угао ромба на два једнака дела, то је $\measuredangle DAO = \measuredangle BAO$ и $\measuredangle B_1AO_1 = \measuredangle D_1AO_1$, па је $\measuredangle OAO_1 = 180°$, одакле закључујемо да су тачке O, A и O_1 колинеарне. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на праву OO_1. Како је тачка E средиште дужи BD_1 и $EF \parallel BO \parallel D_1O_1$, то је EF средња линија трапеза, одакле је тачка F средиште дужи OO_1. Дакле, тачка E се налази на симетрали дужи OO_1, па је троугао OEO_1 једнакокрак.

Други начин. $\triangle ADD_1 \cong \triangle ABB_1$ јер је $\measuredangle B_1AB = \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1ABD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1AD$, $AB = AD$ и $AB_1 = AD_1$ па је $DD_1 = BB_1$.



Сл. уз зад. 420



Сл. уз зад. 421

Како се дијагонале ромба полове и тачка E је средиште дужи BD_1, имамо $EO = \dfrac{1}{2}DD_1$ и $EO_1 = \dfrac{1}{2}BB_1$ као средње линије троуглова BDD_1 и D_1BB_1, одакле је $EO = EO_1$, па је троугао EOO_1 једнакокрак.

422. Претпоставимо да су на такмичењу ученици из највише 44 града и да из сваког града има највише 44 ученика. Тада је на такмичењу највише могло да буде 1936 ученика. Како је на такмичењу било више од 1936 учесника, ако бисмо претпоставили да је неко од преосталих такмичара из неког од датих градова, он би био 45. такмичар из тог града, а ако бисмо претпоставили да је из неког другог од понуђених градова то би био 45. град одакле има такмичара, па важи тврђење задатка.

423. Број n можемо записати у облику

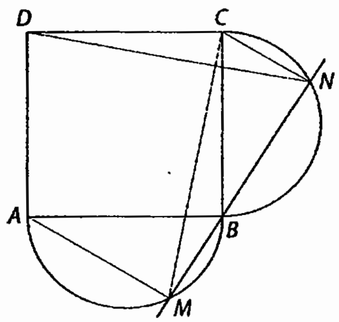
$$n = 3p + a,\ 0 \leqslant a \leqslant 2; \quad n = 6q + b,\ 0 \leqslant b \leqslant 5;$$
$$n = 9r + c,\ 0 \leqslant c \leqslant 8; \quad 0 \leqslant a + b + c \leqslant 15.$$

С обзиром да је $a + b + c = 15$, то следи да је $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$. Тада је $n + 1 = 3p + 3 = 6q + 6 = 9r + 9$. Дакле, $n + 1$ је дељиво са 3, 6 и 9, тј. дељиво је са 18. Значи да је $n + 1 = 18k$, па је $n = 18k - 1$, што значи да је остатак при дељењу броја n са 18 једнак 17.

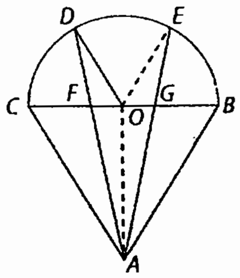
424. Нека је $h_a = h_b + h_c$. Из $2P = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ добијамо да је $\dfrac{h_c}{a} = \dfrac{h_a}{c}$ и $\dfrac{h_b}{a} = \dfrac{h_a}{b}$. Тада је $\dfrac{h_c + h_b}{a} = h_a\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b}\right)$, односно, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b}$. Сада је $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{b^2 + 2bc + c^2}{b^2c^2}$, односно, $b^2c^2 = a^2(b^2 + 2bc + c^2)$. Одавде је $(a^2 - bc)^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2)$, па закључујемо да је $a^2 + b^2 + c^2$ природан број и да је то квадрат природног броја јер је $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\dfrac{a^2 - bc}{a}\right)^2$.

425. Нека је цена неке робе x. Првог дана цена те робе је $101\%x = 1{,}01x$. Другог дана цена те робе је $99\% \cdot (1{,}01x) = 0{,}99 \cdot 1{,}01x = 0{,}9999x$. Понаваљајући ово имамо да је након 2010 дана цена те робе $0{,}9999^{1005}x$. Како је $0{,}9999 < 1$, то је и $0{,}9999^{1005} < 1$, одакле закључујемо да је цена робе после 2010 дана нижа него првог дана.

426. $\measuredangle ABM + \measuredangle CBN = 90^\circ$. $\measuredangle BNC$ је периферијски угао над пречником BC па је прав. Одавде је $\measuredangle ABM = \measuredangle BCN$. Како су полукружнице k_1 и k_2 подударне (имају једнаке пречнике) и како једнаким периферијским угловима одговарају једнаке тетиве, то је $AM = BN$. Сада имамо да је $\triangle MBC \cong \triangle NCD$ одакле је $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$. Како је један пар кракова ових углова нормалан (BC и CD) то закључујемо да је и други пар кракова нормалан, односно $CM \perp DN$.



Сл. уз зад. 426



Сл. уз зад. 429

427. Није могуће. У противном би збир $(Z+E+C)+(V+U+K)+(S+L+O+N)$ био једнак 45, тј. дељив са 9 (јер се свака цифра појављује тачно једанпут), а самим тим би и збир $ZEC + VUK + SLON$ био дељив са 9. Међутим, 2010 није дељиво са 9.

428. Одузимајући другу од треће једначине система добијамо $z = 1$, па се систем своди на $|x| + y = 2008$, $x + y = 2009$. Одузимајући другу од прве једначине система добијамо једначину $|x| - x = -1$. Разматрајући случајеве по x имамо:

i) $x \geqslant 0$. $x - x = -1$, $0 = -1$ па једначина нема решења у овом случају.

ii) $x < 0$. $-x - x = -1$, одакле је $x = \dfrac{1}{2}$ па ни у овом случају једначина нема решења.

Дакле, закључујемо да полазни систем нема решења.

429. Нека је O центар полукружнице (средиште странице BC). Троугао ODC је једнакостраничан и поред тога је страница троугла ODC два пута мања од странице троугла ABC (слика). Како су одговарајући углови троуглова ODF и CAF једнаки, они су слични, а на основу претходног је

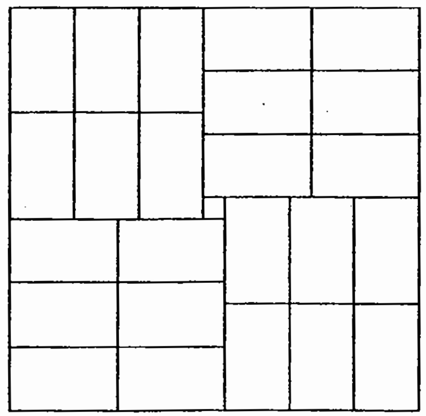
$CF = 2FO$. Аналогно показујемо да је $GB = 2GO$. Сада тврђење задатка следи на основу чињенице да је $OB = OC$.

430. Нека су на наспрамним странама коцке записани природни бројеви a и x, b и y, c и z. Тада је:

$$abc + abz + ayz + acy + xbc + xbz + xyz + xcy = 105,$$
$$a(bc + bz + yz + cy) + x(bc + bz + yz + cy) = 105,$$
$$(a + x)(b(c + z) + y(z + c)) = 105,$$
$$(a + x)(b + y)(c + z) = 105.$$

Како су сви бројеви природни, то је сваки чинилац последњег производа већи од 1, а како је $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то су бројеви $a + x$, $b + y$ и $c + z$ различити бројеви из скупа $\{3, 5, 7\}$. Дакле, збир свих бројева на странама коцке је $3 + 5 + 7 = 15$.

431. Означимо основну ивицу призме са a, а висину са b. Тада је $2a + b = 100$. Површина омотача ће бити највећа када израз nab, тј. ab има највећу вредност. Имамо да је $ab = a(100 - 2a) = -2a^2 + 100a = -2(a^2 - 50a) = -2(a^2 - 50a + 625 - 625) = -2(a - 25)^2 + 1250$. Зато ab има највећу вредност када је $a - 25 = 0$, тј. $a = 25$. Дакле, највећа површина је $1250n$.



Сл. уз зад. 432

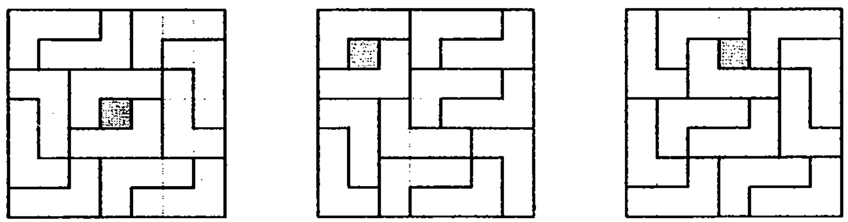
432. Поделимо квадрат као на слици, на 24 правоугаоника 3×5 и један квадрат. Бар у једном од правоугаоника нема више од 3 обојена поља, јер би у супротном укупан број обојених поља био бар $4 \cdot 24 = 96$.

433. Четвороугао $BFEC$ је тетиван јер је $\angle BEC = \angle BFC = 90°$, па је $\angle AFE = \angle ACB = \gamma$ (спољашњи угао тетивног четвороугла једнак је наспрамном унутрашњем углу). Даље је $\gamma = \angle AFE = \angle BFN$ као унакрсни углови. Четвороугао $MBNF$ је тетиван ($\angle FNB = \angle FMA = 90°$) одакле је $\gamma = \angle BFN = \angle BMN$. Дакле, $\gamma = \angle BMN = \angle ACB$ одакле следи тврђење задатка.

434. Како $x, y \in [1,2]$, то је $y \leqslant 2 \leqslant 2x$ и $x \leqslant 2 \leqslant 2y$. Сада је $(2x-y)\times(x-2y) \leqslant 0$ па је $2x^2 - 2y^2 \leqslant 5xy$, односно $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leqslant \frac{5}{2}$. Непосредно добијамо да је $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{9}{2}$.

435. За $p=2$ добијамо да је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5=348$, а то није дељиво са 13. За $p=3$ добијамо да је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5 = 512+27^3+512^2-5 \equiv 5+1+5^2-5 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{13}$, па је $p=3$ решење задатка.
Ако је $p>3$ онда је $p = 6k \pm 1$, за неко $k \in \mathbf{N}$, одакле је $p^2 \equiv 1 \pmod{12}$. Како је $2^{12} \equiv 3^{12} \equiv 4^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ (мала Фермаова теорема или директна провера), то је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5 \equiv 2+3+4-5 = 4 \pmod{13}$, па у овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $p=3$.

436. Бојењем табеле у црно-бело у шаховском стилу, добијамо 25 црних и 24 белих поља. Како L фигура покрива два црна и два бела поља, морамо избацити црно поље. Сада обојимо таблу по колонама црно-бело. Нека је x број L фигура које прекривају три црна и једно бело поље. Разлика броја црних и белих поља у овом случају може бити 8 или 6, у зависности да ли смо избацили бело или црно поље. Како је $x+y=12$, због парности следи $x-y=4$, па морамо избацити бело поље. Добили смо девет кандидата и пробањем за три случаја лако налазимо тражена поплочавања (слика). Због симетрије, довољно је посматрати поља $(2,2)$, $(2,4)$ и $(4,4)$.



Сл. уз зад. 436

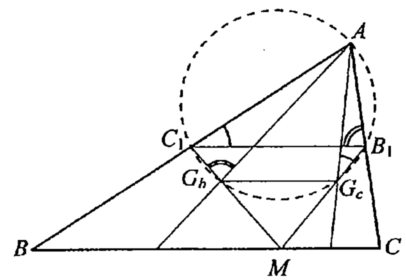
437. Добијени деветоцифрени број може се написати у облику
$$1\,000\,000\,A + 2\,000\,A + A = 1\,002\,001\,A = 1001^2A = 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2 A.$$

Следи да A мора бити потпун квадрат, при чему је $\sqrt{A} \in \{11, 12, \dots, 22\}$. Провера показује да бројеви 196, 256, 289, 361, 441 и 484 задовољавају услове задатка.

438. *Прво решење.* Ако прву од наредне три АГ неједнакости
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc, \quad ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 3abc, \quad ac^2+ba^2+cb^2 \geqslant 3abc$$
помножимо са 1, другу са 2, а трећу са 4, и резултате саберемо, добијамо да је
$$(a^3+2ab^2+4ac^2)+(b^3+2bc^2+4ba^2)+(c^3+2ca^2+4cb^2) \geqslant 21abc.$$
Дељењем са $abc>0$ добија се неједнакост која се доказује. Једнакост важи ако и само ако важи у наведене три неједнакости, дакле ако и само ако је $a=b=c$.
Друго решење. Трансформишимо леву страну дате неједнакости и применимо АГ неједнакост за 21 број:
$$L = \frac{a^2}{bc}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}$$
$$+\frac{c^2}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a} \geqslant 21\sqrt[21]{\frac{a^8b^8c^8}{a^8b^8c^8}} = 21.$$

439. Сви бројеви су међусобно различити јер ако би два броја била једнака, онда би њихова разлика била 0, а како нула није природан број, она се не може појавити на табли. Нека је $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2010}$. Онда је $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots < a_{2009} - a_1 < a_{2010} - a_1$. Сви ови бројеви су на табли па је: $a_{2009} = a_{2010} - a_1$, $a_{2008} = a_{2009} - a_1$, ... , $a_1 = a_2 - a_1$. Одавде је $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1$, ... , $a_{2010} = 2010a_1$, односно $a_k = ka_1$. Како је 2011 прост број који је записан на табли, то је $a_1 = 2011$, одакле следи тврђење задатка.

440. Нека су средишта страница AB и AC редом C_1 и B_1, а тежишта троуглова ABM и ACM редом G_b и G_c (види слику).



Сл. уз зад. 440

Како је четвороугао $ABMG_c$ тетивни, то је $\angle ABM = 180^\circ - \angle AG_cM = \angle AG_cB_1$. Из паралелности $C_1B_1 \parallel BC$ следи да је $\angle ABM = \angle AC_1B_1$, па је $\angle AG_cB_1 = \angle AC_1B_1$. Како су оба угла над дужи AB_1, то је четвороугао $AC_1G_cB_1$ тетивни, тј. тачка G_c припада кружници описаној око троугла AB_1C_1. Аналогно се доказује да и тачка G_b припада тој кружници. Дакле, тачке A, C_1, G_b, G_c и B_1 припадају једној кружници. Како је $G_cG_b \parallel B_1C_1$, то је $MG_b : G_bC_1 = MG_c : G_cC_1 = 2 : 1$, јер су G_b и G_c тежишта троуглова ABM и ACM. Како је четвороугао $C_1B_1G_cG_b$ тетивни трапез, то је $\angle G_bC_1B_! = 180^\circ - \angle C_1B_1G_c = \angle G_cB_1C_1$ што значи да је трапез једнакокрак. Према томе и $MB_1 = MC_1$, што је и требало доказати.

441. Сабирањем датих једнакости добијамо да је

$$abc + bcd + cda + dab = 0.$$

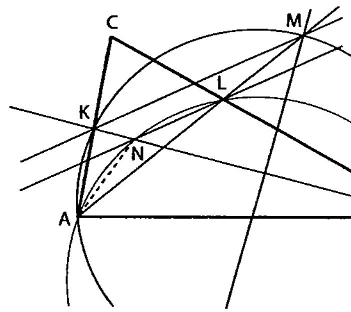
Ако би неки од датих бројева, рецимо d, био једнак нули, из претходне једнакости би слиедило да је $abc = 0$, па прва од датих једнакости не би била могућа. Дакле, важи $abcd \neq 0$, па из претходног дељењем добијамо да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

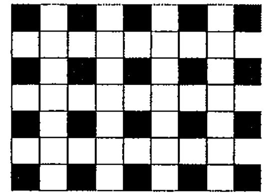
Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је $a + b + c + d = 0$. Тада из претходне једнакости добијамо да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, а одатле сређивањем $(a+b+c)(bc+ca+ab) = abc$ и $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$. Следи да је бар један од израза на левој страни једнак нули. Нека је, на пример, $a + b = 0$. Тада сабирањем друге и треће од једнакости датих у задатку добијамо $0 = 2 + 3$, што је немогуће. На сличан начин се и у осталим случајевима долази до контрадикције, па закључујемо да мора бити $a + b + c + d \neq 0$.

442. Претпоставимо да је услов задатка испуњен. Како је број $n \cdot 2^{n+1} + 1$ непаран, то је $n \cdot 2^{n+1} + 1 = (2m+1)^2$, односно $n \cdot 2^{n-1} = m(m+1)$. Како су m и $m + 1$ узајамно прости бројеви, одавде следи да је један од њих дељив са 2^{n-1}, а други не може бити већи од n. Зато је $2^{n-1} \leqslant n + 1$. Докажимо индукцијом да ова неједнакост не може да важи за $n \geqslant 4$.
Заиста, за $n = 4$ је $8 = 2^{4-1} > 5 = 4 + 1$. Претпоставимо да је, за неко n, $2^{n-1} > n + 1$. Множењем са 2 добијамо да је $2^n > 2(n+1) > n + 2$, чиме је индукцијом доказано да је $2^{n-1} > n + 1$ за $n \geqslant 4$.
Дакле, мора бити $n \leqslant 3$. Провером се добија да $n = 1$ и $n = 2$ не задовољавају услов задатка, а да је $n = 3$ једино решење (када је дати израз једнак 49).

443. Тачка M припада кружници описаној око троугла ABK, јер се симетрала странице троугла и симетрала наспрамног угла секу на описаној кружници (слика). Зато је $\angle ALN = \angle AMK$ (углови на трансверзали) $= \angle ABK$ (периферијски углови) $= \angle ABN$. Дакле, четвороугао $ABLN$ је такође тетивни, одакле даље добијамо да је $\angle NAL = \angle NBL$ (периферисјки углови)

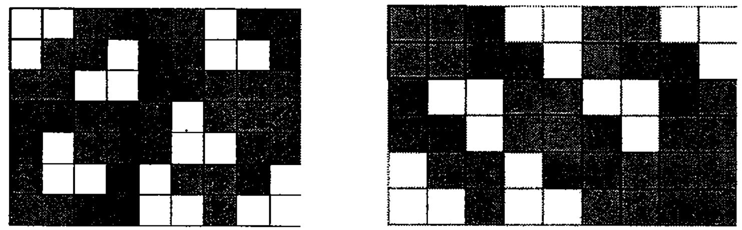


Сл. уз зад. 443



Сл. 1 уз зад. 444

$= \angle ABK$ (јер је BK симетрала угла ABC) $= \angle ALN$. Према томе, троугао ALN је једнакокрак и важи $LN = NA$.



Сл. 2 уз зад. 444

444. Претпоставимо да је правоугаоник покривен на описани начин и означимо са m број фигура L-облика. Укупан број поља датог правоугаоника је $4n + 3m = 63$. Следи да је n дељиво са 3. Обојимо 20 поља датог правоугаоника као на слици 1. Тада било која L-фигура покрива највише једно обојено поље, а квадратна фигура покрива тачно једно обојено поље. Зато је $n + m \geqslant 20$, тј. $3n + 3m \geqslant 60$. Из претходне једнакости следи да је $n \leqslant 3$, па су $n = 0$ и $n = 3$ једине могућности. На слици 2 је показано да је у овим случајевима заиста могуће извршити тражено покривање.

2011. година

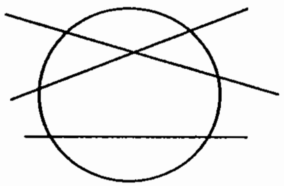
445. 2.

446.

	П	Е	Т	А	Р
оштри	/	/		3	/
прави	2	4		/	5
тупи	/	/		2	/

447. 558, 585, 588, 833, 835, 838, 853, 855, 858, 883, 885, 888.

448. Може. Један пример дат је на слици.



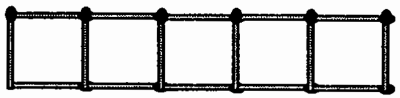
Сл. уз зад. 448

449. Како за $5 - 3 = 2$ свеске треба платити $136 = 46 + 90$ динара, то за једну свеску треба дати $136 : 2 = 68$ динара.

450. а) $109109 + 45568 = 154677$; б) $100000 - 60006 = 39994$.

451. а) 222211; б) 100011.

452. Решење је дато на слици.

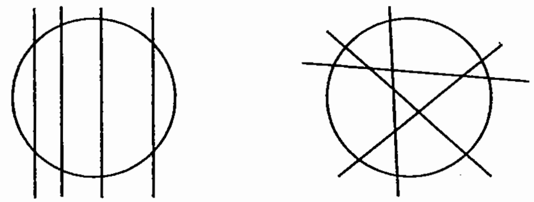


Сл. уз зад. 452

453. Најмање на 5 делова, слика лево, а највише на 11 делова.

454. Лако се види да A не може бити веће од 4. За $A = 4$, рачун није тачан, јер је тада први сабирак већи од збира. Како је и $A > 2$, мора бити $A = 3$. Тада је $B = 9$.

455. 10910.



Сл. уз зад. 453

456. Како скуп A има 2009 елемената, а унија 2011, то значи да унија садржи 2 елемента која нису у A, то јест припадају само скупу B. Како скуп B садржи 2010 елемената и 2 елемента која су различита од елемената скупа A, то значи да су остали елементи заједнички, па пресек садржи 2008 елемената.

457. Ако осмину траженог угла означимо са x, тада је мера траженог угла $8x$. Како је угао суплементан са својом осмином, имамо да је $x + 8x = 180°$. Дакле, мера осмине угла је $x = 20°$, а тражени угао има $160°$.

458. Како је $960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 8 \cdot 10 \cdot 12$, то су тражени бројеви 8, 10 и 12. Тражени збир је 30.

459. Милица је прве недеље прочитала $(840 : 7) \cdot 5 = 600$ страница. Дакле, након прве недеље остало јој је 240 страница. Друге недеље је прочитала $(240 : 4) \cdot 3 = 180$ страница, па јој је за трећу недељу остало $240180 = 60$ страница.

460. Како је $(2006 + 2005 + 2004 + 2003) - (2010 + 2009 + 2008 + 2007) = -16$, то је $1999 - * = -16$, па је тражена вредност 2015.

461. Како је $\beta_1 = 3\beta$, то је $\beta + 3\beta = 180°$ па је $\beta = 45°$ и $\beta_1 = 135°$. Нека је $\beta_1 = 2\alpha$. Тада је $\alpha = 67°30'$. Дакле, углови троугла су $45°, 67°30', 67°30'$.

462. Узимајући редом вредност за a и b из скупова A и B, и рачунајући вредност израза $|a + b|$, добијамо елементе скупа $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

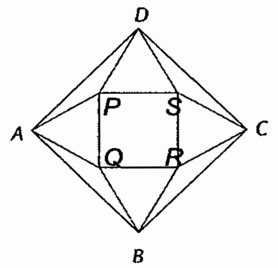
463. Овакав троугао не постоји јер је дата страница једнака збиру друге две, а мора бити мања.

464. Јасно је да је $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$. Дакле, тражени бројеви су: 1) 4, 5; 2) 2, 3, 4. Међутим, како је збир два супротна броја 0, осим ова два постоје још 3 решења: 3) $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; 4) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$; 5) $-1, 0, 1, 2, 3, 4$. Дакле, задатак има 5 решења.

465. -1

466. Нека је $a = -0{,}2011\,2011\ldots$. Тада је $10000\,a = -2011{,}2011\,2011\ldots$. Сада је $10000\,a - a = -2011$, па је $9999\,a = -2011$, односно $a = -\frac{2011}{9999}$. Како је 2011 прост број, то су бројеви 2011 и 9999 узајамно прости, па су решења: $x = -2011, y = 9999$ или $x = 2011, y = -9999$.

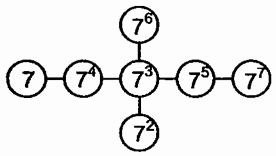
467. Означимо темена почетног квадрата са P, Q, R и S. Сви унутрашњи углови конструисаних троуглова су једнаки и сви углови квадрата су прави, па је $\measuredangle APD = \measuredangle DSC = \measuredangle CRB = \measuredangle BQA = 150°$. Како је $AP = PD = DS = SC = CR = RB = BQ = QA$, то су и сви троуглови APD, DSC, CRB и BQA подударни и једнакокраки (једнаки по два пара страница и углови између тих страница). Из подударности ових троуглова следи да је $AB = BC = CD = DA$. Како су сви унутрашњи углови четвороугла $ABCD$ прави (састоје се од унутрашњег угла једнакостраничног троугла и два угла на основици једнакокраких троуглова од по 15°) то је тражени четвороугао квадрат.



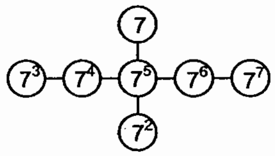
Сл. уз зад. 467

468. Полазна једначина је еквивалентна са $|x| = x + 5$. Разматраћемо случајеве када је $x \geqslant 0$ и $x < 0$. Ако је $x \geqslant 0$, тада је $|x| = x$, па полазна једначина има облик $x = x + 5$ и она нема решења. Ако је $x < 0$, тада је $|x| = -x$ и полазна једначина има облик $-x = x + 5$, одакле долазимо до решења $x = -2{,}5$.

469. Последње цифре бројева $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ су редом $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3$. Број 1 не може бити у средини, јер је збир осталих бројева 38, што подељено са 2 даје 19, а 19 се не може добити као збир два броја из овог низа.
Ако је 3 у средини, збир осталих бројева је 36, а половина од тога је 18. Те бројеве можемо распоредити тако да су цифре 9 у вертикалном реду, а остале бројеве у водоравним кружићима. Постоје и друга попуњавања, ако се промене места бројева који се завршавају истом цифром. Таквом распореду бројева одговара решење на слици а).



Сл. уз зад. 469а)



Сл. уз зад. 469б)

Ако је 7 у средини, збир преосталих бројева је 32. Пошто $7 + 9 = 16$, та два броја стављамо вертикално, а остале бројеве водоравно. Таквом распореду бројева одговара решење на слици б).
Ако би 9 било на средини, и усправно и водоравно би требало да остали бројеви дају збир 15, што није могуће.

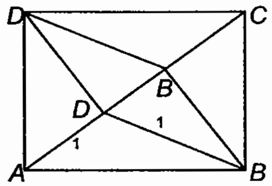
470. а) 16 cm, 32 cm, 20 cm; б) 16 cm, 32 cm, 20 cm; в) 8 cm, 16 cm, 10 cm; г) 4,5 cm; 9 cm; 5,625 cm.

$*$		a
c	15	9
b		24

471. Како квадрат треба да буде магичан, то мора бити $a+15+b = a+9+24$, тј. $15+b = 9+24$, одакле је $b = 18$. С друге стране мора бити и $c + 15 + 9 = c + b + *$, тј. $15 + 9 = 18 + *$, па је $* = 6$.

472. Ако две суседне, једнаке ивице, означимо са a, а трећу ивицу са b, онда је збир свих ивица овог квадра $8a + 4b = 64$, тј. $2a + b = 16$. Одавде закључујемо да a мора бити мање од 8, па заменом вредонсти од 1 до 7 имамо следеће могућности: $(a, b) \in \{(1, 14), (2, 12), (3, 10), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 2)\}$.

473. Како је $AD = 6\,\text{cm}$ и $AC = AB + 2$, применом Питагорине теореме на троугао ABC добијамо да је $AB = 8\,\text{cm}$ и $AD = 10\,\text{cm}$. Како је BB_1 висина на хипотенузу правоуглог троугла ABC, добијамо да је $BB_1 = 4{,}8\,\text{cm}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао BB_1C добијамо да је $BB_1 = 3{,}6\,\text{cm}$. Како су троуглови BB_1C и DD_1A подударни, то је $AD_1 = 3{,}6\,\text{cm}$. Дакле, $B_1D_1 = 2{,}8\,\text{cm}$. Површина четвороугла BB_1DD_1 једнака је двострукој површини троугла BB_1D_1. Дакле, тражена површина је $13{,}44\,\text{cm}^2$.

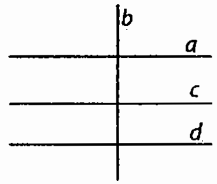


Сл. уз зад. 473

474. $x = 1/3$.

475. Види слику.

	a	b	c	d
a		⊥	∥	∥
b	⊥		⊥	⊥
c	∥	⊥		∥
d	∥	⊥	∥	



Сл. уз зад. 475

476. Како је $31 + 28 + 31 = 90$, то значи да је Вера рођена 31. марта 2009. године. Дакле, Вера има 1 годину 11 месеци и 5 дана или $365 + 365 - 31 + 5 = 704$ дана.

477. Највећи такав број је 800, а најмањи 107, па је тражена разлика 693, а тражени збир 907.

478. Задатак има више решења. За свако важе неједнакости као на слици. Једно решење је $2 < 5 < 7 < 21 > 16 > 13$.

$$\square < \square < \square < \boxed{21} > \square > \square$$

Сл. уз зад. 478

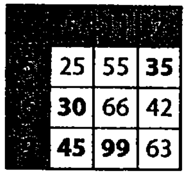
479. Хараламлије највише може да има $2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 = 62$ јоцка, а најмање $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 10 = 26$ јоцка.

480. Страница квадрата је $4\,\mathrm{cm}$. Правоугаоник је подељен на $11 \cdot 4 = 44$ квадрата.

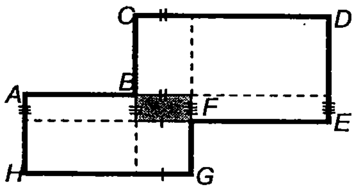
481. Збир прве две цифре је 2 (као и друге две) и таквих бројева има шест: 2020, 2011, 2002, 1120, 1111, 1102.

482. Ако Мома има M сличица, Јова има $2M$ сличица, а Боба $3J$ односно $6M$. Дакле, $6M + M = 210$, одакле закључујемо да Мома има 30 сличица, Јова 60 сличица, а Боба 180 сличица.

483. Види слику.



Сл. уз зад. 483



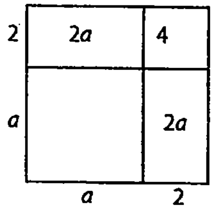
Сл. уз зад. 484

484. Дужина изломљене линије $ABCDEFGHA$ је (слика): $2 \cdot (AB + FG + FE + BC) + 6\,\mathrm{cm} = 34\,\mathrm{cm}$.

485. $\frac{2}{4} + \frac{3}{6} + \cdots + \frac{99}{198} = 98 \cdot \frac{1}{2} = 49$.

486. а) $\alpha = 36°30'$, $\beta = 143°30'$; б) $\alpha = 53°30'$, $\beta = 126°30'$; в) $\alpha = 87°$, $\beta = 93°$.

487. Прости бројеви мањи од 30 су: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Једно решење је $13 + 17 = 11 + 19 = 7 + 23$.



Сл. уз зад. 488

488. Како коцка има 6 страна, то се површина сваке стране повећа за $96 : 6 = 16\,\mathrm{cm}^2$. Повећањем ивице коцке за $2\,\mathrm{cm}$, површина једне стране коцке се повећа за површину два праваоугаоника страница $2\,\mathrm{cm}$ и a, и један

квадрат површине $4\,\mathrm{cm}^2$ (види слику). Према томе, важи $2a + 2a + 4 = 16$, односно $a = 3\,\mathrm{cm}$. Дакле, тражена површина је $P = 6 \cdot a^2 = 54\,\mathrm{cm}^2$.

489. Означимо годину када је особа рођена са $\overline{abcd}$. Тада је $2011 = \overline{abcd} + a + b + c + d = 1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 1001a + 101b + 11c + 2d$. Једино је могуће $a = 1$. Тада имамо $101b + 11c + 2d = 1010$. Једина могућност за b је 9. Тада је $11c + 2d = 101$. Једина могућност за c је 9, па је онда $d = 1$. Дакле, особа је рођена 1991. године.

490. $x = -8$, $y = -3$, $z = -48$. а) -440; б) 8; в) -4.

491. Хипотенуза је дужине $10\,\mathrm{cm}$, па је њој одговарајућа тежишна дуж дужине $5\,\mathrm{cm}$. Тражено растојање је трећина тежишне дужи, тј. $\frac{5}{3}\,\mathrm{cm}$.

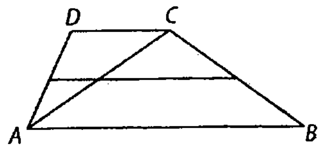
492. Ако је $p = 2$, тада је могуће наћи 8 решења (четири за $a \in \{2011, -2011\}$ и $b \in \{1, -1\}$ и четири за $a \in \{1, -1\}$ и $b \in \{2011, -2011\}$).
Ако је $p = 2011$, тада је могуће наћи још 8 решења (четири за $a \in \{1, -1\}$ и $b \in \{2, -2\}$ и четири за $a \in \{2, -2\}$ и $b \in \{1, -1\}$).

493. Ако је највећи угао при врху једнакокраког троугла, онда су углови на основици по $(180° - 8°) : 3 = 57°20'$, а угао при врху $65°20'$.
Ако су углови на основици већи од угла при врху, онда тај угао има $(180° - 16°) : 3 = 54°40'$, а углови на основици по $62°40'$.

494. Како је $7560 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то је:
а) највећи број са траженим особинама 75333222;
б) најмањи број са траженим особинама 35789.

495. а) 9; б) 80.

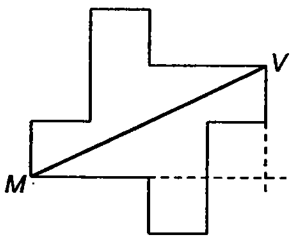
496. Одсечци средње линије трапеза су средње линије троуглова ACD и ABC (слика). Према томе, $DC = 2 \cdot 2 = 4\,\mathrm{cm}$, $AB = 2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$, па је $\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{2}{5}$.



Сл. уз зад. 496

497. $x - 2 \geqslant 0$, тј. $x \geqslant 2$. $(\sqrt{x-2})^2 = x - 2$, па првобитна једначина има облик $|x - 1| = 7$. Како је $x - 1 > 0$, јер је $x \geqslant 2$, то је $x - 1 = 7$, односно $x = 8$.

498. Тражени двоцифрени бројеви су облика $\overline{ab}$ Из $\overline{ab} + \overline{ba} = c^2$ добијамо $11(a + b) = c^2$. Како је $2 \leqslant a + b \leqslant 18$, то је $a + b = 11$. Тражени бројеви су 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.



Сл. уз зад. 499

499. Површина једног правоугаоника је $50\,cm^2$, а његове димензије су $5\,cm$ и $10\,cm$ (слика). Одатле је $MV^2 = 20^2 + 10^2$, $MV = 10\sqrt{5}$ cm.

500. Ако је $x \geqslant 0$: $x = 670$. Ако је $x < 0$: $x = -2010$.

501. $H = 8\sqrt{3}\,cm$, $a = 12\sqrt{2}\,cm$, $P = (288 + 384\sqrt{6})\,cm^2$, $V = 2304\sqrt{3}\,cm^2$.

502. Могући распореди теретних (Т) и путничких (П) вагона су: ТПТППП, ТППТПП, ТПППТП, ТППППТ, ПТПТПП, ПТППТП, ПТПППТ, ППТПТП, ППТППТ, ПППТПТ.

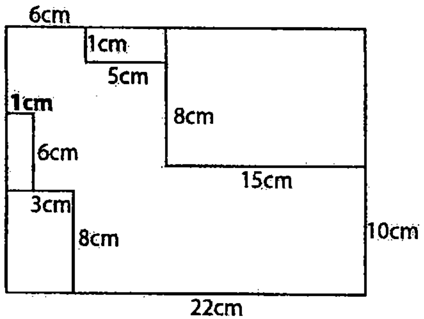
503. Нека је полупречник мањег круга r. Тада је $\frac{1}{7} \cdot 7^2\pi\,cm^2 = \frac{1}{4}r^2\pi\,cm^2$, па је површина мањег круга $28\pi\,cm^2$.

504. За $x \neq 0$ важи $\frac{x}{|x|} = \pm 1$. Ако су a, b и c сви истог знака, тада је и abc тог знака. У том случају S може бити 4 или -4. Ако a, b и c нису сви истог знака, тада су од четири броја a, b, c и abc увек два позитивна и два негативна, па је $S = 0$.

505. $x \cdot 257 - 422 = 88500$, $x = 346$.

506. Четвороцифрени број је облика $abba$, а троцифрени cdc. Сада је $abba = 2011 + cdc$. Ако је $a = 2$ имамо $2bb2 = 2011 + cdc$, односно $b \cdot 100 + b \cdot 10 + 2 = c \cdot 100 + (d + 1) \cdot 10 + c + 1$. Одавде је $c = 1$, $b = 1$ и $d = 0$. За $a = 3$ не постоје тражени бројеви.

507. Ако дату фигуру допунимо до правоугаоника (види слику), његове странице су дужине 26 cm и 19 cm. Површина фигуре је онда $26 \cdot 19 - (15 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4) = 316$. Дакле, $P = 316\,cm^2$.



Сл. уз зад. 507

508. Од 12 коцкица могу да се направе 4 квадра, типа: $12 \times 1 \times 1$, $6 \times 2 \times 1$, $4 \times 3 \times 1$ и $3 \times 2 \times 2$.

а) Најмању површину има квадар типа $3 \times 2 \times 2$ и то $32\,cm^2$.

б) Највећу површину има квадар типа $12 \times 1 \times 1$ и то $50\,cm^2$.

509. Чика Ратко у џепу може да има:

а) 11 новчаница: 3 од 100, 3 од 500 и 5 од 1000 динара;

б) 18 новчаница: 8 од 100, 8 од 500 и 2 од 1000 динара.

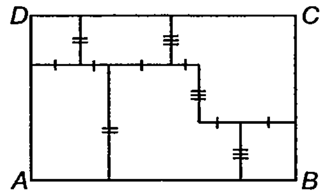
510. 4,9.

511. Како је $2013 = 3 \cdot 671$ и $2010 = 3 \cdot 670$, то се дати број може записати у облику $3 \cdot (2009 \cdot 2011 \cdot 671 + 2008 \cdot 670 \cdot 2012)$, па закључујемо да је он сложен.

512. Како α, β и γ имају паралелне краке, они су једнаки или суплементни. Како је $\alpha + \beta = 2011'$, то је $\alpha = \beta = 16°45'30''$. Како је разлика углова γ и β већа од $90°$, угао γ је туп и углови γ и β су суплементни, па је $\gamma = 163°14'30''$.

513. P, Q, R и S могу имати вредности 2, 3, 5 и 7. Како је збир последњих цифара сабирака једанак R, а $2 + 3 + 5 + 7 = 17$, то је $R = 7$. Како са места јединица постоји прелаз од једне десетице имамо да је $8 + Q + R = Q$, тј. $8 + R = 10$, одакле је $R = 2$. Како са места десетица имамо пренос, имамо да је $8 + Q = S$, па закључујемо да је $Q = 5$ и $S = 3$.

514. Како је збир дужина страница обележених са једном цртом, односно са две, односно са 3 црте (слика) једнак редом 14,26 cm, 11,3 cm, 11,3 cm и како су све дужи обележене цртом странице две новодобијене фигуре, то је збир обима свих 6 фигура $(2 \cdot AB + 2 \cdot BC) + (2 \cdot AB + 4 \cdot BC) = 124{,}84$ cm.



Сл. уз зад. 514

515. а) Производ је највећи када је позитиван, па треба изабрати четири негативна броја. Њихов производ је $\frac{5}{84}$.

б) Најмањи производ добијамо када изаберемо бројеве $-\frac{4}{7}$, $-\frac{7}{8}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{5}{14}$ и тада је производ $-\frac{1}{14}$.

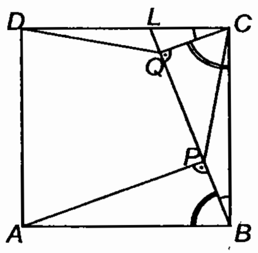
516. Како је $CC_1 = 3\,cm$, то је $AB = 6\,cm$. Такође имамо да је $\measuredangle ABC = 75°$, па се задатак своди на конструкцију троугла ако су дати страница и два налегла угла.

517. Поделимо тај правоугаоник на 670 квадрата површине $1\,cm^2$. Ако у сваки од тих квадрата распоредимо по 3 тачке, укупно 2010, у ма који квадрат да ставимо последњу тачку он ће садржати 4 тачке.

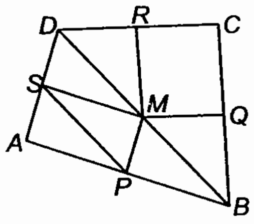
518. $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$ јер је $AB = BC$, $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90°$ и $\measuredangle ABP = 90° - \measuredangle QBC = \measuredangle BCQ$ (слика). Сада је $BP = CQ$ и $\measuredangle DCQ = \measuredangle PBC$, па како је $BC = CD$, то је $\triangle PBC \cong \triangle QCD$. Значи, $DQ = CP$.

519. Како је

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c),$$



Сл. уз зад. 518



Сл. уз зад. 523

то ће дати збир бити квадрат неког природног броја ако $a+b+c$ буде најмање једнако са $2\cdot 3\cdot 37$, што је немогуће (a,b,c су једноцифрени бројеви).

520. Из $a^2-2a+1+b^2+6b+9=0$ добијамо $(a-1)^2+(b+3)^2=0$. Одавде је $a=1$ и $b=-3$ па је $a^{2009}-2009b=6028$.

521. Ако са a и b означимо катете троугла, а са h хипотенузину висину, тада је $a^2=h^2+16^2$, $b^2=h^2+9^2$ и $a^2+b^2=25^2$. Одатле је $h=12\,\mathrm{cm}$, $a=20\,\mathrm{cm}$ и $b=15\,\mathrm{cm}$, па је $O=60\,\mathrm{cm}$ и $P=150\,\mathrm{cm}^2$.

522. Овај број је сложен јер је

$$\begin{aligned}2009\cdot 2011-48&=(2010-1)(2010+1)-48=2010^2-1-48\\&=2010^2-49=(2010-7)(2010+7).\end{aligned}$$

523. Из $\triangle APS\cong\triangle PBM$ и $\triangle APS\cong\triangle SMD$ следи $PS=DM=MB$ и $PS\parallel BM$ и $PS\parallel MD$ (слика). Према томе, тачке B, M и D су колинеарне и M дели дијагоналу на два једнака дела. Сада је MR средња линија троугла BCD и $MR\parallel BC$ и $MR=\frac{1}{2}BC=QC$, Према томе, $MQCR$ је паралелограм.

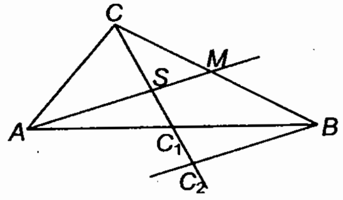
524. Тражени четвороцифрени број $\overline{abcd}$ задовољава услове $a+b+c+d=a\cdot b$ и $a+b+c+d=\overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a+b=9c$, односно $c=1$ ($c=2$ даје $a=b=9$, што је у супротности са првим условом). Сада имамо да је $10+d=a\cdot b$ па за $d=4$ добијамо решење 2714 и 7214, односно за $d=8$ добијамо решења 3618 и 6318.

525. График функције има три гране $y=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ 2, & -1\leqslant x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$ и образује са правом $y=4$ једнакокраки трапез. Темена трапеза су тачке са координатама $(-1,2)$, $(1,2)$, $(2,4)$ и $(-2,4)$. Основице трапеза су дужине 2 и 4, а висина трапеза дужине 2, па је површина трапеза $P=6$.

526.

$$\begin{aligned}a-b&=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{2011^2-2010^2}{4021}\\&=\frac{1}{1}+\frac{3\cdot 1}{3}+\frac{5\cdot 1}{5}+\frac{4021\cdot 1}{4021}=2011.\end{aligned}$$

527. Нацртајмо праву паралелну са AM која садржи тачку B и нека је пресек ове праве са CC_1 тачка C_2 (слика). Тада је $\triangle AC_1S\cong\triangle BC_1C_2$, па је $C_2C_1=C_1S$. На основу Талесове теореме је $CM:MB=CS:2SC_1$, односно $CS:SC_1=2011:1006$.



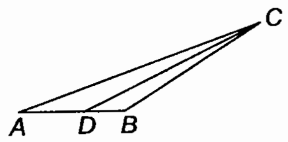
Сл. уз зад. 527

528. Бројеви x и $65x^3$ су исте парности, па x мора бити непаран број. $x=1$ није решење јер $2011-65$ није дељиво са 4, а $x\geqslant 5$ није решење јер је тада $65x^3>2011$. За $x=3$ добијамо да је $y=4$ решење дате једначине.

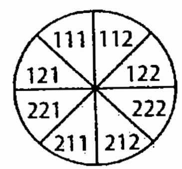
529. Ако са H, B и V обележимо, редом, висину, површину основе и запремину почетне пирамиде, а са H_1, B_1 и V_1 висину, површину основе и запремину пирамиде $AMNP$, тада из $AP:PS=3:1$ добијамо да је $H_1=\frac{3}{4}H$ а из $AM:MB=1:1$, $AN:ND=2:1$ добијамо да је $B_1=\frac{1}{6}B$. Следи да је $V_1=\frac{1}{8}V$, па је $V_1:(V-V_1)=1:7$.

530. Збир цифара броја који се добија када се броју 357 додају цифре 3, 5 и 7 је 30 па је увек дељив са 3. Како мора бити дељив и са 5, цифра 5 мора бити додата као последња. Дакле, могући бројеви су 373575, 733575, 335775, 735735, 357375 и 357735. Бројеви дељиви са 7 су 735735 и 357735, па су то и решења задатка.

531. Спољашњи углови троугла су 72°, 126° и 162°, па су унутрашњи углови 108°, 54° и 18°. Нека је $\measuredangle ABC=108^\circ$ и $\measuredangle ACB=18^\circ$. Према томе, $\measuredangle DCB=9^\circ$, па је $\measuredangle CDB=180^\circ-(108^\circ+9^\circ)=63^\circ$.



Сл. уз зад. 531

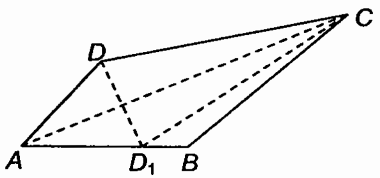


Сл. уз зад. 532

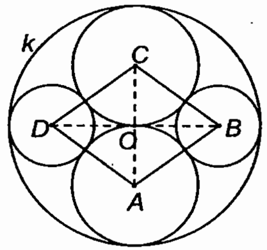
532. Тражени бројеви су 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 и 222 па је једно решење дато на слици.

533. Најмање сабирака ће бити ако је $A = 1$. Број 111111 можемо записати као $1001 \cdot 111$, односно $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Највећи четвороцифрени број који можемо записати коришћењем нека четири од наведених пет чинилаца је $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547$. Дакле, 13 је најмањи број четвороцифрених сабирака са различитим цифрама који у збиру дају број 111111.

534. Нека је D_1 симетрична тачка тачки D у односу на дијагоналу AC. Како је $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$, тачка D_1 се налази на страници AB. Одавде је $AD = AD_1$ и $D_1C = DC$. Можемо конструисати троугао D_1BC чије су странице дужина 2 cm, 6 cm и 7 cm. Продужимо страницу BD_1 преко темена D_1 и нанесемо тачку A тако да је $BA = 5$ cm. Сада можемо конструисати троугао ACD чије су нам све странице познате и добијамо и четврто теме четвороугла $ABCD$.



Сл. уз зад. 534



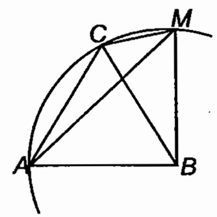
Сл. уз зад. 537

535. Било које три тачке можемо изабрати на $9 \cdot 8 \cdot 7$ начина, а како три исте тачке можемо одабрати на 6 начина, укупан број различитих тројки тачака је 84. Међутим, како има 8 тројки колинеарних тачака, то дате тачке формирају 76 различитих троуглова.

536. Из поставке задатка имамо да је $x^2 = y^2 + \dfrac{10}{y}$. Како је x цео број, то и $\dfrac{10}{y}$ мора бити цео број. Следи да је $y \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5\}$. Провером добијамо да су решења $(x, y) \in \{(3,2), (-3,2)\}$.

537. Непосредно следи да су две веће кружнице подударне, а због симетрије у односу на праву AC, подударне су и две мање кружнице (слика). Нека је $r = 3$ cm полупречник веће кружнице, а r_1 полупречник мање кружнице. Четвороугао $ABCD$ је ромб јер је $AB = BC = CD = DA = r + r_1$. Како се дијагонале ромба полове и секу под правим углом, троугао OBC је правоугли

и важи $3^2 + (6 - r_1)^2 = (3 + r_1)^2$. Одавде је $r_1 = 2$ cm. Површина четвороугла $ABCD$ је $24\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 538

538. Нека је k кружница са центром у тачки B и полупречником AB, слика. Тачка M припада овој кружници јер је угао ABC два пута већи од угла CMA (централни и периферијски угао). Према томе, троугао ABM је једнакокрак па је угао MAB једнак 45°. Дакле, угао ABM једнак је 90°.

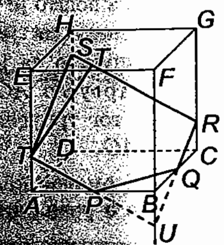
539. Претпоставимо да тражени број n постоји и да $(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)$. Тада $1020^n - 1$ дели и разлику $(2010^n - 1) - (1020^n - 1) = 2010^n - 1020^n = 2^n \cdot (1005^n - 510^n)$. Како је број $1020^n - 1$ непаран и дели $2^n \cdot (1005^n - 510^n)$, то $1020^n - 1$ дели $1005^n - 510^n$. Међутим, како је $1020^n - 1 > 1005^n > 1005^n - 510^n$, то је немогуће, па тражени број n не постоји.

540. Како је $x(x+2)(x+4)(x+6) = (x^2+6x)(x^2+6x+8) = (x^2+6x)^2 + 8 \cdot (x^2+6x) + 16 - 16 = (x^2+6x+4)^2 - 16$, то је најмања вредност израза -16 и достиже се када је $x^2 + 6x + 9 - 5 = 0$, односно за $(x+3)^2 = 5$, то јест за $x = -3 - \sqrt{5}$ или $x = -3 + \sqrt{5}$.

541. Раван α сече пет од шест страна коцке $ABCDEFGH$, слика. Дакле, сече два пара паралелних страна, па петоугао има два пара паралелних страница. Пресек је петоугао $PQRST$ који је део паралелограма $URST$. Јасно је да је површина петоугла мања од површине паралелограма, односно ако са TT_1 обележимо висину паралелограма која одговара страницама SR и TU, важи следеће:

$$P_{PQRST} < P_{URST} = RS \cdot TT_1 < RS \cdot ST,$$

што је и требало доказати.



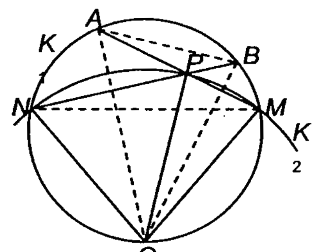
Сл. уз зад. 541

Сл. уз зад. 542

542. Четврти степен ма ког целог броја може се завршавати само цифрама 0, 1, 5 и 6. Збир два четврта степен може се завршавати само цифрама 0, 1, 2, 5, 6 и 7, док се збир четвртог степена неког броја и броја 3 може завршавати само цифрама 3, 4, 8 и 9 (види табеле на претходној страни). Дакле, не постоје цели бројеви x, y и z за које важи дата једнакост јер ће цифре јединица леве и десне стране једнакости бити увек различите.

543. Збир цифара свих таквих бројева је 2016, а како је 2016 дељиво са 9, и сви ти бројеви су дељиви са 9. Да би неки од тих бројева били дељиви са 11, разлика збира цифара на парним и непарним местима мора бити дељива са 11. Због избора цифара које се употребљавају за запис броја, разлика збира цифара на парним и непарним местима једино може бити 0. Како има 1006 непарних места, 1005 парних и збир цифара на овим местима мора бити 1008, то једна тројка може бити на неком непарном месту, а једна тројка и једна двојка на неким парним местима. Тројка на непарним местима може да се запише на 1006 начина, а двојка и тројка на парним местима на $1005 \cdot 1004$ начина. Дакле, у том скупу је $1006 \cdot 1005 \cdot 1004$ бројева дељивих са 99.

544. Обележимо са K_2 круг са центром O и полупречником OP. Из једнакости периферијских углова у кругу K_1 следи $\measuredangle AMN = \measuredangle AON$, а из односа централног и периферијском угла у кругу K_2, следи да је $2 \cdot \measuredangle PMN = \measuredangle PON$. Дакле, права AO је симетрала угла PON, а пошто је троугао PON једнакокрак, следи да је $AO \perp PN$. Слично закључујемо да је $BO \perp PM$. Посматрајмо троугао AOB. Тачка R је ортоцентар тог троугла јер је $AP \perp BO$ и $BP \perp AO$.

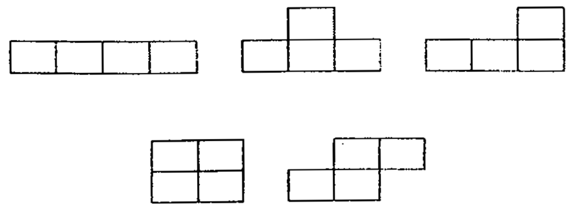


Сл. уз зад. 544

545. (а) Има 5 различитих тетрамина који су приказни на слици а на следећој страни.
(б) Могуће је и има више решења. Једно је приказано на слици б.

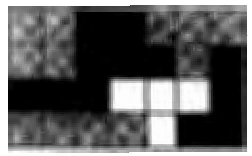
546. Јасно је да ако број n у свом декадном запису садржи цифру 0, онда је $p(n) = 0$ и такве сабирке можемо занемарити. Групишући редом по 9 од преосталих сабирака добијамо да је $p(1111) + \cdots + p(1119) = 1 + \cdots + 9 = 45$, затим $p(1121) + \cdots + p(1129) = 2(1 + \cdots + 9) = 2 \cdot 45$, и тако даље до $p(1191) + \cdots + p(1199) = 9 \cdot 45$, па је збир сабирака из стотине између 1100 и 1199 једнак $45(1+2+\cdots+9) = 45^2$. Слично се за наредних 8 стотина редом добијају збирови $2 \cdot 45^2, \ldots, 9 \cdot 45^2$. На тај начин је укупан тражени збир једнак

$$45^2(1+2+\cdots+9) = 45^2 \cdot 45 = 45^3.$$



Сл. уз зад. 545а

547. Доцртајмо теме D тако да $ADBC$ буде правоугаоник. На страници AD уочимо тачку P тако да је $DP = CM$ $(= AN)$. Лако се доказује да је $\triangle PDB \cong \triangle MCA$ $(\cong NAP)$. Одавде следи да је $BP \parallel AM$, па је $\measuredangle NBP$ једнак траженом углу. При том је троугао NPB једнакокрак и правоугли, па је угао између правих BN и AM једнак $45°$.



Сл. уз зад. 545б

548. Доказаћемо да је $S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \dfrac{1}{\sqrt{abc}} \geqslant 4\sqrt{3}$, са једнакошћу ако и само ако је $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. Применом АГ неједнакости следи $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3\sqrt[6]{abc}$. Ако уведемо смену $t^6 = abc$, потребно је показати следећу неједнакост

$$3t + \frac{1}{t^3} \geqslant 4\sqrt{3},$$

уз ограничење $t^2 = \sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3}$. Сада применимо још једном АГ неједнакост:

$$3t + \frac{1}{t^3} = 3t + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3t^3} \geqslant 4\sqrt[4]{3t \cdot \frac{1}{3t^3} \cdot \frac{1}{3t^3} \cdot \frac{1}{3t^3}}$$
$$= 4\sqrt[4]{\frac{1}{3^2t^8}} = 4\frac{1}{t^2\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt{3}.$$

549. Растављањем на чиниоце добијамо
$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = a^3(a^2+a+1) + (a^2+a+1) = (a^2+a+1)(a^3+1)$.
Раставимо на сличан начин и преостала два чиниоца на левој страни. После скраћивања видимо да треба доказати неједнакост

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \geqslant 8.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо:

$$a^3+1 \geqslant 2\sqrt{a^3}, \quad b^3+1 \geqslant 2\sqrt{b^3}, \quad c^3+1 \geqslant 2\sqrt{c^3}.$$

Множењем ове три неједнакости и применом услова $abc = 1$ добијамо

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \geqslant 8\sqrt{a^3b^3c^3} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$.

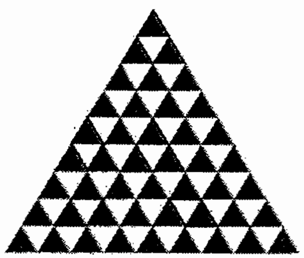
550. Дата једнакост је еквивалентна са

$$(x+y)(xy-p) = 5p.$$

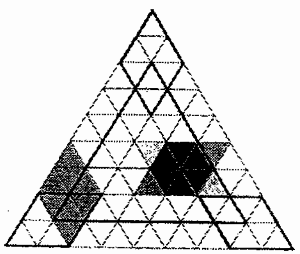
Разликујемо следећа четири случаја:

1. $x+y=1$ и $xy=6p$. Јасно је да у овом случају нема решења.
2. $x+y=5$ и $xy=2p$. Заменом $y=5-x$ у другу једнакост добијамо $x(5-x)=2p$. Како је десна страна позитивна, то је $5-x>0$, тј. $x \in \{1,2,3,4\}$. За $x=1$ и $x=4$ добијамо да је $p=2$, а за $x=2$ и $x=3$ добијамо да је $p=3$.
3. $x+y=p$ и $xy=p+5$. Заменом $y=p-x$ у другу једнакост добијамо $x^2-px+p+5=0$. Множењем ове једначине са 4 и додавањем p^2 на обе стране добијамо $4x^2-4px+p^2=p^2-4p-20$. Одавде следи да је $(2x-p)^2-(p-2)^2=-24$. Коришћењем разлике квадрата и скраћивањем добијамо $(x-1)(x-p+1)=-6$. Како је $x-1 \geq 0$, то $x \in \{2,3,4,7\}$. Заменом одговарајућих вредности редом добијамо да $p \in \{9,7,7,9\}$, а једино је $p=7$ прост број.
4. За $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Због $xy=p+1$ следи $x \leq p+1$ и $y \leq p+1$. Зато је $5p = x+y \leq 2p+2$, односно $3p \leq 2$. Ово је немогуће.

Дата једначина има природна решења ако и само ако је $p \in \{2,3,7\}$.



Сл. уз зад. 551а



Сл. уз зад. 551б

551. Обојимо троуглове црно-бело као на слици а. Сваки ромб који се састоји од 2 „мала" троугла састоји се од једног црног и једног белог троугла.

Сваки бели троугао може формирати тачно 3 ромба који се састоје од 2 „мала" троугла, па је број m једнак троструком броју белих поља

$$m = 3\cdot(1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{3(n-1)n}{2}.$$

Приметимо да пресеци дијагонала ромбова сачињених од 8 „малих" троуглова могу бити само темена „малих" троуглова који припадају централном једнакостраничном троуглу (на слици б подебљаном). Темена тог троугла су центри по једног ромба, преостале тачке на обиму по два, а тачке унутар троугла по три. Зато је

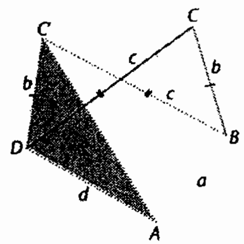
$$d = 3\cdot1+2\cdot3(n-4)+3(1+2+\cdots+(n-5)) = \frac{3(n^2-5n+6)}{2} = \frac{3(n-3)(n-2)}{2}.$$

Коначно је $m-d = 3(2n-3)$.

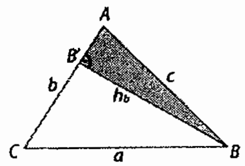
552. Докажимо најпре следеће помоћно тврђење.

Нека је S површина конвексног четвороугла $ABCD$. Тада је

$$S \leqslant \frac{1}{2}(AB\cdot CD + BC\cdot DA).$$



Сл. уз зад. 552-1



Сл. уз зад. 552-2

У циљу доказа, конструишимо тачку C' такву да је $BC' = CD$ и $DC' = BC$ (слика 1). При том је $\triangle BCD \cong \triangle BC'D$ и четвороуглови $ABCD$ и $ABC'D$ имају једнаке површине. Како је површина троугла мања или једнака од полупроизвода његових двеју страница (слика 2), то је

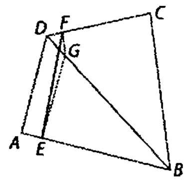
$$S = S_{ADC'} + S_{ABC'} \leqslant \frac{1}{2}AD\cdot DC' + \frac{1}{2}AB\cdot BC' = \frac{1}{2}(AB\cdot CD + BC\cdot DA).$$

Применимо доказано тврђење на четвороугао $AEFD$ и добијамо да је

$$S \leqslant \frac{1}{2}(AE\cdot DF + DA\cdot EF) = \frac{1}{2n^2}(AB\cdot CD + n^2 DA\cdot EF).$$

Нека је G тачка на дијагонали BD таква да је $DB : DG = n$ (слика 3). Применом Талесове теореме добијамо да је $GE = \frac{n-1}{n} AD$ и $GF = \frac{1}{n} BC$. Применом неједнакости троугла, из $\triangle EGF$ добијамо да је $EF \leqslant EG + GF = \frac{(n-1)AD + BC}{n}$, па је

$$S \leqslant \frac{AB \cdot CD + n^2 DA \cdot EF}{2n^2} \leqslant \frac{AB \cdot CD + n(n-1)DA + n\,DA \cdot BC}{2n^2}.$$



Сл. уз зад. 552-3