

TEMA 2. – DIRIHLEOV PRINCIP

1. Dokazati da je između 100 proizvoljnih celih brojeva uvek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih deljiva sa 7.
2. Dato je proizvoljnih 1111 prirodnih brojeva. Dokazati da bar 124 od datih brojeva počinje istom cifrom, bar 112 datih brojeva se završava istom cifrom i bar 13 brojeva počinje i završava se istom cifrom.
3. Dokazati da uvek postoji prirodan broj koji počinje sa 9876543210, a deljiv je sa 1995.
4. Dokazati da se između 51 proizvoljnih, a različitih prirodnih brojeva manjih od 100 mogu izabrati tri takva da je jedan od njih jednak zbiru ostala dva.
5. Data su 52 proizvoljna prirodna broja. Dokazati da među njima postoje dva čiji je zbir ili razlika deljiva sa 100. Važi li dato tvrđenje za 51 broj?
6. Dato je 20 različitih prirodnih brojeva manjih od 70. Dokazati da među svim mogućim razlikama tih brojeva postoje bar četiri jednake.
7. Brojevi od 1 do 10 su zapisani u niz u proizvoljnom poretku, a svaki od njih je sabran sa svojim rednim brojem. Dokazati da među dobijenim zbirovima postoje bar dva čija je poslednja cifra jednaka.
8. Čvorovi beskonačne kvadratne mreže obojeni su crvenom ili plavom bojom. Dokazati da postoje dve horizontalne i dve vertikalne linije koje grade u kvadratnoj mreži pravougaonik čija su sva temena iste boje.
9. U kocki stranice 13 cm na proizvoljan način je raspoređeno 1997 tačaka. Dokazati da u toj kocki postoji kocka ivice 1 cm unutar koje se ne nalazi nijedna tačka.
10. U kocki stranice 1 m na proizvoljan način je raspoređena 2001 muva. Dokazati da u toj kocki postoji sfera poluprečnika $\frac{1}{11}$ m unutar koje se nalaze bar 3 muve.
11. Dato je sedam duži od kojih je svaka duža od 10 cm, a kraća od 1 m. Dokazati da među njima postoje tri duži od kojih se može sastaviti trougao.
12. Dokazati da postoji prirodan broj koji se u dekadnom zapisu zapisuje samo šesticama i nulama, a deljiv je sa 1996.
13. Ako se iz skupa prvih $2n$ prirodnih brojeva izabere $n+1$ brojeva, postoje bar dva od njih od kojih je jedan deljiv drugim. Dokazati.
14. Niz 0003, 0009, 0027, 0081, 0243, 0729, 2187, čine četvorocifreni završeci brojeva $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$. Dokazati da je počev od nekog člana taj niz periodičan.
15. Dokazati da postoji stepen broja 3 čiji se dekadni zapis završava ciframa 0001.
16. Prirodni brojevi od 1 do $2n$ zapisani su u proizvoljnom poretku, a zatim je ispod svakog od njih napisan njegov redni broj u tom nizu. Svaki broj je potom sabran sa svojim rednim brojem. Dokazati da među tako dobijenim brojevima postoje dva čija je razlika deljiva sa $2n$.
17. Dokazati da među proizvoljnih devet uzastopnih prirodnih brojeva postoji bar jedan koji je uzajamno prost sa svakim od ostalih osam brojeva.
18. Raspolaže se sa $2n+1$ kartica, numerisanih prirodnim brojevima od 1 do $2n+1$. Koliko se najviše kartica može izabrati, tako da nijedan od brojeva napisanih na odabranim karticama nije jednak zbiru neka druga dva broja na izvučenim karticama.
19. U kvadratu stranice 15 cm raspoređeno je 20 disjunktnih kvadrata stranice 1 cm. Dokazati da postoji krug poluprečnika 1 cm koji ne dodiruje ni jedan od datih kvadrata.
20. Unutar konveksnog $2n$ -tougona data je tačka P. Svako teme I tačka P određuju po jednu pravu. Dokazati da postoji strana mnogougla s kojom ni jedna od tih pravih nema zajedničkih unutrašnjih tačaka.

21. Unutar kvadrata stranice 1 cm raspoređeno je nekoliko krugova čiji zbir obima je 10 cm. Dokazati da postoji prava koja preseca bar 4 data kruga.
22. Unutar kvadrata stranice 1 cm nalazi se konveksan mnogougao sa 100 stranica. Dokazati da postoji trougao čija su temena - temena datog mnogougla i čija je površina manja od $0,0008 \text{ cm}^2$.

KONKURSNI ZADACI

1. Svaka tačka ravni na proizvoljan način je obojena jednom od tri boje. Dokazati da u datoj ravni postoje dve tačke iste boje čije je rastojanje 1 cm.
2. U skupu od 10 bilo kojih dvocifrenih brojeva postoje dva disjunktna podskupa takva da je zbir elemenata u jednom podskupu jednak zbiru elemenata u drugom podskupu.
3. Dokazati da se među 39 uzastopnih prirodnih brojeva nalazi bar jedan broj čiji je zbir cifara deljiv sa 11.

TEMA 3. – LINEARNE DIOFANTSKE JEDNAČINE

1. Vlada je kupio sveske po ceni od 7 dinara i olovke po ceni od 4 dinara. Koliko je kupio sveski ,a koliko olovki ako je platio 60 dinara?
2. Koliko novčanica od 2 dinara ,a koliko od 5 dinara je potrebno za plaćanje računa od 43 dinara?
3. Odrediti sve cele brojeve x i y koji su rešenje jednačine $4x+9y=58$.
4. U jednom razredu bilo je 15 devojčica i 18 dečaka. Kako će oni međusobno podeliti 1234 klikera tako da svi dečaci dobiju podjednak broj klikera i sve devojčice takođe dobiju podjednak broj klikera?
5. Dokazati da sledeće jednačine nemaju celobrojnih rešenja:
a) $3x+15y = 1997$; b) $21x - 35y = 88$; c) $6x^2 - 33y^2 = 4444444$.
6. Dokazati da jednačina $ax+by = c$ ima celobrojnih rešenja ako i samo ako je c deljivo sa $\text{NZD}(a,b)$.
7. Ako je (x_0,y_0) jedno rešenje jednačine $ax+by=c$, onda je njeno opšte rešenje dato formulama $x=x_0+bk$, $y=y_0-ak$, $k \in \mathbb{Z}$. Dokazati.
8. Odrediti jedno rešenje, a zatim napisati opšte rešenje sledećih jednačina: a) $3x - 5y = 77$; b) $4x + 11y = 121$; c) $7x - 100y = 35$.
9. U jednoj četi koja broji 100 lica, vojnici imaju platu $\frac{1}{2}$ dinara, podoficiri 1 dinar, a oficiri 5 dinara. Koliko ima vojnika, koliko podoficira, a koliko oficira ako je za isplatu plata potrebno tačno 100 dinara?
10. Koliko rešenja u skupu prirodnih brojeva ima jednačina : $3x + 7y = 1995$?
11. Odrediti sve prirodne brojeve koji su rešenja jednačine:
a) $x + 2y + 3z = 55$; b) $2x + 3y + 4z = 66$.
12. Odrediti prirodne brojeve x i y tako da je $x^2 + 4y^2 = 244$.
13. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $5x^2 + 3y^2 = 1033$.
14. Limunada košta 5 dinara a boza 7 dinara. Koliko je popijeno limunada i koliko boza ako je plaćeno ukupno 58 dinara?
15. Odrediti opšte celobrojno rešenje jednačine: $3x - 8y = 123$.
16. Grafitne olovke koštaju $\frac{1}{2}$ dinara, hemijske 2 dinara, a patent olovke 3 dinara. Kako za 100 dinara kupiti tačno 100 olovaka?

17. Raspoložemo sa sudovima od 2 i 7 dinara. Na koliko načina se pomoću datih sudova može napuniti bure čija je zapremina 1234 litra. Koji je najbrži, a koji je najsporiji način da se to uradi?

KONKURSNI ZADACI

1. Prema istočnjačkoj bajci "Šeherezada" devojka Šeherezada je iz noći u noć pričala moćnom sultanu po 3 ili po 5 bajki. Za koliko je najviše noći mogla da ispriča 1001 bajku? Za koliko je noći najbrže to mogla da učini? Koliko raznih mogućnosti za iskazivanje svih bajki postoji?
2. Na skladištu se nalaze ekseri upakovani u sanduke od 16 kg, 17 kg i 40 kg. Kako, ne otvarajući sanduke, kupcu isporučiti tačno 100 kg eksera?
3. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2 = 2023$.

TEMA 4. – NELINEARNE DIOFANTSKE JEDNAČINE

1. Odrediti cele brojeve x i y za koje je:
a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 2$; c) $x^2 + y^2 = 10$; d) $x^2 + y^2 = 1$; e) $x^2 + y^2 = 3$.
2. Postoje li celi brojevi x i y za koje je: $x^2 + y^4 = 2x - 1$?
3. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu: $4x^2 + y^2 = 12x + 4y - 12$.
4. Koliko rešenja u skupu celih brojeva ima jednačina $x^4 + y^2 + 2y = 1$?
5. Odrediti cele brojeve x i y tako da je $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.
6. Postoje li celi brojevi x, y, z takvi da je $x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23$?
7. Odrediti prirodan broj n tako da je $n^2 + 3n = 1989$.
8. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu: $x^2 + y^2 = x - y + 12345$.
9. Postoje li dva uzastopna prirodna broja čiji je proizvod:
a) 12345678;
b) 444...444 (1995 četvorki)?
10. Odrediti prirodan broj n tako da je $n^2 + n = 121314$.
11. Dokazati da jednačina $x^2 - x + 5y = 999999$ nema rešenja u skupu prirodnih brojeva.
12. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $x^3 - 3x^2 + 2x - 1990y = 181818$.
13. Postoje li prirodni brojevi x i y takvi da je:
a) $x^2 + 5^y = 888...888$ (100 osmica);
b) $x^2 + 5y = 888...888$ (1995 osmica)?
14. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu: $x^{1992} + y^{1996} = 123456789$.
15. Postoje li prirodni brojevi x, y i z takvi da je:
 $x^{100} + y^{200} + z^{300} = 444...444$ (400 četvorki)?
16. Odrediti prirodne brojeve x i y tako da je $x! + 2y = 5555$.
17. Postoje li prirodan broj x i prost broj p takvi da je $x! + 2 = p^2$.
18. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $1! + 2! + \dots + x! = y^2$.
19. Postoje li prirodni brojevi x, y, z takvi da je $5^x + 6^y + z! = 999...99$ (999 devetki)?
20. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačine: a) $x^2 + y^2 = 1994$.
21. Postoje li celi brojevi x, y, z takvi da je: $x^2 + y^2 + z^2 = 8x - 10z - 32$?
22. Rešiti jednačinu $x^2 + y^2 = 1995$.
23. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $9^x + y! = 6585$.

KONKURSNI ZADACI

1. Da li jednačina $x! + 2y^4 + 5^z = 9876543210$ ima rešenja u skupu prirodnih brojeva?
2. Rešiti jednačine: a) $x^2 + y^2 = 1996$; b) $x^2 + y^2 = 1997$; c) $x^2 + xy + y^2 = 1$.

3. Odrediti cele brojeve $x_1, x_2, \dots, x_{1995}$, tako da je:

a) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2 = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{1996}) - 1997$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2 = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{1996}) - 1996$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2 = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{1996}) - 1995$.

TEMA 5. – NELINEARNE DIOFANTSKE JEDNAČINE (2. DEO)

1. Odrediti sve cele brojeve za koje je :

a) $xy + 2x = 7$;

b) $xy + 3y - 5x = 18$;

c) $x^2 - y^2 = 12$.

2. Odrediti prirodan broj k i prost broj p tako da je: $p = k^4 + 4$.

3. Odrediti prirodan broj k tako da je $k^2 + 2k + 13$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Postoje li celi brojevi x i y takvi da je: $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?

5. Odrediti prirodan broj k i prost broj p tako da je $5p + 1 = k^2$.

6. Postoji li prost broj p koji se može prikazati u obliku $8k^2 + 10k + 3$, gde je k neki ceo broj?

7. Odrediti sve cele brojeve koji se mogu prikazati u obliku razlomka: $\frac{a^2 + 2}{a - 1}$

gde je a ceo broj različit od 1.

8. Odrediti sve parove celih brojeva x i y tako da je njihov proizvod 5 puta veći od njihovog zbira.

9. Postoje li celi brojevi x i y za koje je $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$?

10. Odrediti sve dvocifrene prirodne brojeve čija je vrednost jednaka kvadratu zbira njihovih cifara.

11. Odrediti sve pravouglo trouglove čija je jedna kateta 9cm, a dužina druge katete i hipotenuze (u centimetrima) su prirodni brojevi.

12. Postoje li prost broj p i prirodan broj k za koje je $3p + 1 = k^3$?

13. U skupu celih brojeva reši jednačinu : $x^2y = y^3 + 10$.

KONKURSNI ZADACI

1. Odrediti cele brojeve a, b i c takve da je $abc + ab = a + ac + 3$.

2. Postoje li prost broj p i prirodan broj k takvi da je $k^3 - 3k = p - 2$?

3. Odrediti prirodne brojeve x i y tako da je $y^4 + x = xy + 9$.

TEMA 7. – PROBLEMSKI ZADACI

1. Odrediti cifre a, b, c, d ako je $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ ($q \neq 1$), pri čemu su deljenik, delilac i količnik potpuni kvadrati prirodnih brojeva.
2. Dešifrovati množenje: $\overline{abcde} \times 4 = \overline{edcba}$.
3. Odrediti sve cele brojeve a i b takve da je $a + b = ab = a : b$.
4. Odrediti najmanji prirodan broj koji pomnožen sa 2 daje tačan kvadrat, a pomnožen sa tri daje tačan kub.
5. Odrediti dvocifren broj čiji je kvadrat jednak kubu zbira njegovih cifara.
6. Odrediti četvorocifreni broj koji je jednak četvrtom stepenu zbira njegovih cifara.
7. Data su dva uzastopna prirodna broja m i n i njihov proizvod p . Dokazati da je zbir njihovih kvadrata – broj $x = m^2 + n^2 + p^2$ uvek potpun kvadrat.
8. Zbir prvih n prirodnih brojeva jednak je trocifrenom broju sa jednakim ciframa. Odrediti n .
9. Odrediti najmanje prirodne brojeve a i b za koje je $500a - 7b = 1$.
10. Razlika dva broja je 2, a razlika njihovih kvadrata 100. O kojim brojevima je reč?
11. Odrediti sve dvocifrene brojeve koji su jednaki zbiru kvadrata cifre jedinica i kuba cifre desetice.
12. Odrediti trocifren broj koji je jednak polovini zbira svih dvocifrenih brojeva koji se mogu napisati od cifara traženog broja.
13. Odrediti sve prirodne brojeve x, y i z koji zadovoljavaju jednakost:
$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 1995.$$
14. Odrediti dvocifren broj koji je jednak zbiru kvadrata svojih cifara.
15. Broj 1998 predstavi kao zbir nekoliko prirodnih brojeva, čiji je proizvod takođe 1998.

KONKURSNI ZADACI

1. Odrediti sve dvocifrene brojeve koji su jednaki zbiru kvadrata cifre desetice i kuba cifre jedinica.
2. Zbir dvocifrenog broja i broja napisanog sa istim ciframa u obrnutom redu je potpun kvadrat. O kom broju je reč?
3. Na školskoj tabli napisano je nekoliko brojeva različitih od 0, tako da je svaki od njih jednak polovini zbira ostalih. Koliko je brojeva napisano?

TEMA 8. – PROBLEMI KRETANJA

1. Iz Valjeva i Beograda jedan drugom u susret, istovremeno kreću pešak i biciklista. Ko je u trenutku njihovog susreta bliži Beogradu ako se pešak kreće brzinom od 5 km/h, biciklista brzinom od 15 km/h i ako je rastojanje između Valjeva i Beograda jednako 95 km?
2. Dva pešaka, iz Loznice i Valjeva, istovremeno kreću jedan drugom u susret brzinom od 6 km/h. Istovremeno sa nosa prvog od njih drugom u susret, kreće muva brzinom od 33 km/h i kada stigne do drugog pešaka, vraća se prvom, onda opet drugom i sve tako do trenutka kada se pešaci susretnu. Koliko rastojanje je prešla muva, ako od Valjeva do Loznice ima 72 km.
3. Jedan vozač je svojim automobilom prešao 50.000 km i pri tom je svaki od točkova (4 pogonska i jedan rezervni) prešao jednak broj kilometara. Koliko je prešao svaki točak?
4. Voz dužine 1 km kreće se brzinom od 60 km/h. Koliko vremena treba da protekne od ulaska lokomotive u tunel dug 1 km do izlaska poslednjeg vagona iz tunela?
5. Jedan putnik iz Beograda do Bara stigne za 55 dana, a drugi iz Bara u Beograd za 66 dana. Ako oba krenu u isti čas, jedan drugom u susret, posle koliko dana će se sresti?
6. Dva atletičara brzo-hodača istovremeno kreću sa starta. Prvi ima 10% kraći korak od drugog, ali za isto vreme napravi 10% više koraka od drugog. Ko će pobediti u toj trci?
7. Biciklista prelazi 1 km sa vetrom u leđa za 3 minuta, a sa vetrom u prsa za 5 minuta. Za koliko minuta će preći 1 km ako vetar ne duva?
8. Vozeći uz reku parobrod pređe rastojanje od 63 km za 5 sati, a isti taj put niz reku prelazi za 3 sata. Kolika je brzina ovog parobroda u morskoj vodi?
9. Biciklista je pošao iz mesta A u mesto B gde je trebalo da stigne tačno u određeno vreme. Ako bude vozio brzinom od 35 km/h, zakasniće 2 sata. Ako bude vozio brzinom od 50 km/h, stiće 1 sat ranije. Kolika je udaljenost mesta A i B?
10. Na kružnoj stazi dugoj 1650 m kreću se dva motorciklista različitim, ali konstantnim brzinama. Ako se kreću suprotnim smerovima, susreće se posle jednog minuta; ako se kreću u istom smeru, onda će brži sustići sporijeg posle 11 minuta. Kolika je brzina svakog od njih?
11. Rastojanje između mesta A i B voz je prešao za 23 sata. Polovinu puta je prešao brzinom od 80 km/h, trećinu puta brzinom od 60 km/h i preostali deo puta brzinom od 40 km/h. Koliko je rastojanje između mesta A i B?
12. Avion je preleteo prvih 385 km brzinom od 220 km/h. Drugi deo puta leteo je brzinom od 330 km/h i na taj način postigao srednju brzinu od 256 km/h. Koliko kilometara je preleteo avion?
13. Dva automobila istovremeno polaze iz mesta A i B jedan drugom u susret. Svaki od njih čim stigne u suprotno mesto odmah se vraća nazad. Prvo susretanje automobila desilo se na 50 km od mesta A, a drugo na 30 km od mesta B. Kolika je udaljenost od mesta A do mesta B, ako se automobili kreću stalnim brzinama.
14. Prednja guma motocikla istroši se posle pređenih 25.000 km, a zadnja posle 15.000 km. Posle koliko pređenih kilometara treba promeniti mesto gumama da bi se istovremeno istrošile? Posle koliko pređenih kilometara motociklista mora uzeti nove gume?
15. Automobilista je od mesta A do mesta B vozio brzinom od 60 km/h, a od mesta B do mesta A brzinom 100 km/h. Kolika je bila srednja brzina automobila?

16. Biciklisti A i B kreću istovremeno iz Beograda prema Nišu. Biciklista A je polovinu puta vozio brzinom 30 km/h, a polovinu puta brzinom od 40 km/h. Biciklista B je polovinu vremena vozio brzinom od 30 km/h, a polovinu vremena brzinom 40 km/h. Ko je pre stigao u Niš?

17. Mogu li se trojica turista, koji se kreću peške brzinom od 5 km/h i koji na raspolaganju imaju samo motorcicl sa dva sedišta koji se kreće brzinom od 50 km/h, za tri sata prebaciti iz mesta A u 60 km udaljeno mesto B ?

18. Tri druga žele da što pre stignu iz Valjeva u Lajkovac, pri čemu imaju jedan moped čija je brzina 24 km/h. Oni se dogovore da dvojica krenu mopedom, a treći peške brzinom od 6 km/h. Posle pređenog nekog dela puta, prvi siđe sa mopeda i produži peške, a drugi se vrati po trećeg i nastave putovanje mopedom. U Lajkovac su sva trojica ušla istovremeno. Ako je rastojanje od Lajkovca do Valjeva 28 km, izračunati:

a) po koliko su peške prešli prvi i treći putnik;

b) koliko je ukupno trajalo putovanje?

19. Rastojanje između mesta A i B izražava se celim brojem kilometara koji je deljiv sa 5. Autobus prolazi put od A do B stalnom brzinom od 60 km/h, pri čemu na svakih 5 km ima stanicu na kojoj stoji 5 minuta. Biciklista, koji usput nigde ne staje, prelazi put od A do B stalnom brzinom za 1 sat. Na putu, biciklistu je pretekao autobus, zatim je on pretekao autobus koji je stajao na stanici, zatim ga je ponovo pretekao autobus i više se nisu preticali. Da li je autobus od A do B putovao više od 45 minuta?

20. Iz mesta A prema mestu B krenuo je pešak brzinom 4 km/h. Posle vremena t krenuo je za njim drugi pešak, a posle još vremena t i treći pešak brzinom 6 km/h. Treći pešak je stigao drugog tačno na polovini puta između A i B, a zatim su oni nastavili da se kreću brzinom koja je aritmetička sredina njihovih dotadašnjih brzina. Ako su sva tri pešaka istovremeno stigla u B, odrediti početnu brzinu drugog pešaka?

21. Dva parobroda se kreću ravnomerno u istom smeru dvema paralelnim putanjama. Rastojanje između njih u 6.00 sati je bilo 200 km, u 13.00 sati 150 km i u 17.00 sati 130 km. Koliko je najmanje rastojanje između tih parobroda?

KONKURSNI ZADACI

1. Dva parobroda se kreću po moru uzajamno normalnim pravcima koji se presecaju u tački O. Prvi je od tačke O udaljen 100 km i kreće se brzinom 30 km/h, a drugi je od tačke O udaljen 300 km i kreće se brzinom 40 km/h. Ako se oba kreću ka tački O, kada će njihovo međusobno rastojanje biti najmanje?

2. Putnik želi da pređe pustinju, pri čemu dnevno može da pređe najviše 20 km i pri tome može da ponese rezerve hrane najviše za tri dana. Za koliko dana najmanje može preći put od 80 km? Može li se za 15 dana preći 100 km kroz pustinju?

3. Vojnička kolona ima dužinu 1 km i kreće se ravnomerno. Kurir sa čela kolone dotrči na začelje kolone, preda poruku i trčeći se vrati na čelo kolone. Kolona je za to vreme prešla 1 km. Koliki put je prešao kurir?

TEMA 6. – KOMBINATORIKA

1. Iz mesta A u mesto B vodi 3 puta, iz mesta B u mesto C 4 puta, a iz mesta S u mesto D 5 puteva. Na koliko se načina može doći:
 - a) iz mesta A u mesto C idući preko mesta B ?
 - b) iz mesta A u mesto D idući preko mesta B i C ?
2. Koliko ima trocifrenih brojeva čija je prva cifra: a) neparna b) parna. Koliko je među tim brojevima onih sa različitim ciframa?
3. Koliko se od slova a, b, c može formirati reči dužine 1, 2, 3 ako se slova u jednoj reči: a) mogu ponavljati b) ne mogu ponavljati. Uopštiti za slučaj n slova od kojih se formiraju reči dužine k.
4. Koliko se različitih prirodnih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 1 i 2 ako se svaka cifra može ponoviti najviše dva puta ?
5. Koliko petocifrenih brojeva sa različitim ciframa se može formirati ako su prve dve cifre parne, a poslednje tri neparne?
6. Koliko kolona na tiketu sportske prognoze se mora popuniti da bi se obuhvatile sve kombinacije, ako predviđamo tri fiksna znaka, dva dvoznaka i ostale troznake?
7. Po rasporedu, danas su predviđeni sledeći časovi: matematika, istorija biologija, fizika i hemija. Na koliko se različitih načina može napraviti raspored?
8. Koliko dijagonala ima dvadesetougao ?
9. Koliko šestocifrenih brojeva napisanih ciframa 1, 2, 3, 4, 5, 6 (bez ponavljanja) počinje sa tri parne cifre?
10. Na polici se nalaze tri crvene, četiri žute i pet plavih knjiga. Na koliko načina se knjige mogu razmestiti tako da sve knjige iste boje stoje jedna do druge?
11. U ravni je dato pet tačaka. Koliko date tačke određuju različitih: a) duži, b) trouglova. Uopštiti rezultat za n tačaka i mnogougao od k temena.
12. Koliko različitih delilaca ima broj 210?
13. Na startu trke je 8 trkača. Na koliko se načina mogu: a) podeliti tri medalje b) odabrati trojica za finalnu trku?
14. Trideset učenika jednog odeljenja treba da izabere odeljensku zajednicu, i to: predsednika, blagajnika, sekretara i dva člana. Koliko ima različitih izbora?
15. U vrsti su 4 dečaka i 4 devojčice, ali tako da se između svaka dva dečaka nalazi devojčica. Koliko različitih rasporeda ima?
16. Koliko ima četvorocifrenih brojeva formiranih od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5 kod kojih su cifre 1 i 2 jedna do druge?
17. Na jednom skupu svi prisutni su se međusobno rukovali. Koliko je bilo prisutnih ako je bilo 66 rukovanja?

KONKURSNI ZADACI

1. U kutiji se nalaze 4 bele i 5 crvenih kuglica. Na koliko načina se može izvući jedna bela i dve crvene kuglice ?
2. Koliko ima četvorocifrenih brojeva: a) sa različitim ciframa; b) ukupno ; formiranih od cifara 0, 1, 3, 5, 7 koji su deljivi sa 5 ?
3. Krokodil može imati najviše 68 zuba. Pokazati da među 16^{17} krokodila postoje dva sa istim rasporedom zuba.

TEMA 11.
KOMBINATORIKA
ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Može li se skakač koji se nalazi u donjem levom uglu šahovske table 8×8 , posle 63 poteza naći u gornjem desnom uglu, a da pri tom obiđe sva polja šahovske table?
2. Na koliko načina Raško i Taško mogu da podele 1998 bombona, ako Raško mora uvek dobiti više bombona nego Taško?
3. Na koliko različitih načina Milka, Rada, Sneža i Jasna mogu sedeti na tri stolice A (fotelja), B (školska stolica) i C (kuhinjska stolica), ako ni na jednoj stolici ne mogu sedeti dve osobe, a sve stolice moraju biti popunjene?
4. Koliko ima parnih trocifrenih brojeva čiji je zbir cifara neparan broj?
5. Da li je više četvorocifrenih brojeva čije su sve cifre parne ili je više onih čije su sve cifre neparne? Da li je više prirodnih brojeva čije su sve cifre parne ili onih čije su sve cifre neparne?
6. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva koji se čitaju s leva u desno jednako kao i s desna u levo?
7. Koliko ima šestocifrenih brojeva kod kojih su cifre uzastopni prirodni brojevi bilo u rastućem, bilo u opadajućem poretku?
8. Ako se list hartije zarotira za 180° , onda se cifre 0, 1, 8 ne menjaju, a cifre 6 i 9 prelaze jedna u drugu, dok ostale cifre gube smisao. Koliko ima sedmocifrenih brojeva, koji ne menjaju svoju dekadnu vrednost kada se list hartije zarotira za 180° ?
9. Koliko ima desetocifrenih brojeva kod kojih su sve cifre različite? Koliko ima ukupno prirodnih brojeva kod kojih su sve cifre različite?
10. Napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 1 000 000. Koliko je cifara za njihovo ispisivanje upotrebjeno? Koliki je zbir cifara svih tih brojeva?
11. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1 000 000 čije su sve cifre jednake?
12. Da li je više prirodnih brojeva koji imaju zbir cifara jednak 2 ili je više onih čiji je proizvod cifara jednak 2?
13. Vaterpolo utakmica je završena rezultatom 7:4. Na koliko različitih načina je mogao teći tok utakmice?
14. Koliko ima nula u zapisu brojeva 1, 2, 3, ..., 999 999 999, 1 000 000 000 ?
15. Da li je među brojevima 1, 2, 3, ..., 9 999 999, 10 000 000 više onih u čijem zapisu ima bar jedna jedinica ili je više onih u čijem zapisu nema ni jedne jedinice?
16. Napisati najmanji desetocifreni broj u kome prva cifra predstavlja broj jedinica u tom broju, druga broj dvojki, treća broj trojki, ..., deveta broj devetki, a deseta broj nula.
17. Koliko ima sedmocifrenih prirodnih brojeva sa različitim ciframa u kojima su cifre 5 i 6 susedne?
18. Koliko ima osmocifrenih brojeva sa različitim ciframa u kojima je cifra 1 zapisana pre cifre 2 (može ali ne mora neposredno iza cifre 1) ?
19. U koliko devetocifrenih prirodnih brojeva sa različitim ciframa se između cifara 7 i 8 nalaze tačno 3 druge cifre?
20. Koliko ima trojki (a, b, c) prirodnih brojeva za koje važi $abc = 1000$; ($a \leq b \leq c$) ?
21. Iz skupa $\{1, 2, \dots, 25\}$ je odabrano 17 različitih brojeva. Dokazati da među 17 odabranih brojeva postoje dva različita, takva da je njihov proizvod potpun kvadrat.
22. Da li je među prirodnim brojevima manjim od 1000 više onih čiji je zbir cifara 13 ili onih čiji je zbir cifara 14?
23. Boris, Dušan, Višnja i Milica sede u istoj klupi. Razredni starešina ne želi da Dušan i Boris sede jedan do drugog, da ne bi pričali. Na koliko načina se mogu razmestiti ova četiri učenika ?
24. Na koliko načina se u niz mogu poredati 4 jedinice i 8 nula, tako da nikoje dve jedinice nisu susedne?
25. Koliko ima desetocifrenih brojeva za koje važi da je svaka naredna cifra veća ili jednaka od prethodne?

TEMA 12.

KONGRUENCIJE PO MODULU (I deo)

→ 346/96 - 28.04.2000

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Neka su a i b celi brojevi, a prirodan broj, veći od 1. Broj a je kongruentan broju b po modulu m ako i samo ako pri deljenju sa m brojevi a i b daju isti ostatak. Piše se $a \equiv b \pmod{m}$. Dakle, 17 je kongruentno 32 po modulu 5, u zapisu $17 \equiv 32 \pmod{5}$ jer je $17 = 5 \cdot 3 + 2$ i $32 = 5 \cdot 6 + 2$. Da li je:
a) $17 \equiv 1 \pmod{8}$;
b) $33 \equiv -1 \pmod{17}$;
c) $2000 \equiv 0 \pmod{40}$;
d) $40 \equiv 12 \pmod{6}$?
2. Ako je $a \equiv b \pmod{m}$, onda je $a - b$ deljivo sa m , gde su $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}, m \neq 1$. Dokazati.
3. Dokazati da je $a \equiv a \pmod{m}$ za $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$.
4. Ako je $a \equiv b \pmod{m}$, tada je $b \equiv a \pmod{m}$ za $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$. Dokazati.
5. Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, tada je $a \equiv c \pmod{m}$ za $a, b, c \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$. Dokazati i navesti bar jedan primer.
6. Proveriti da li iz $26 \equiv 11 \pmod{5}$ i $17 \equiv 7 \pmod{5}$ sledi:
 $26 + 17 \equiv 11 + 7 \pmod{5}$,
 $26 - 17 \equiv 11 - 7 \pmod{5}$,
 $26 \cdot 17 \equiv 11 \cdot 7 \pmod{5}$,
 $26 \cdot 53 \equiv 11 \cdot 53 \pmod{5}$,
 $26^3 \equiv 11^3 \pmod{5}$.
7. Dokazati da iz $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$ sledi:
 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
 $a - c \equiv b - d \pmod{m}$,
 $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$,
 $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m}$,
 $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, k, n, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$.
8. Ne sabirajući naći ostatak pri deljenju zbira:
 $8 + 79 + 717 + 7025 + 77040 + 707048 + 721354256$
sa 7.
9. Ne množeći naći ostatak pri deljenju proizvoda:
 $8 \cdot 79 \cdot 717 \cdot 7025 \cdot 77040 \cdot 707048$ sa 7.
10. Kojom cifrom se završava dekadni zapis broja 2^{2000} ?
11. Kojom cifrom se završava dekadni zapis broja 777^{888} ?
12. Odrediti poslednje dve cifre broja 99^{12345} .
13. Koje su poslednje dve cifre broja 2^{100} ?
14. Odrediti poslednje dve cifre broja $S = (n+1)^9 + (n+2)^9 + \dots + (n+100)^9, n \in \mathbb{N}$.
15. Izvesti kriterijum za deljivost celih brojeva sa 2, 3, 4, 5, 6, 8 i 9.
16. Dokazati da je broj deljiv sa 11 ako je razlika zbira cifara na parnim mesnim vrednostima i zbira cifara na neparnim mesnim vrednostima deljiva sa 11.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

17. Dokazati da je broj $43^{1995} - 37^{1993}$ deljiv brojem 5.
18. Dat je broj $M = 19^{91} - 91^{19}$.
a) Dokazati da je $M > 0$.
b) Dokazati da je M deljiv sa 72.

19. Kojom cifrom se završava broj $1^{1996} + 2^{1996} + 3^{1996} + 4^{1996} + \dots + 1996^{1996}$?

KONKURSNI ZADACI

20. Da li je moguće da se zbir $1+2+3+\dots+n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ završava sa 1999?
21. Odrediti poslednje tri cifre broja $1^{1999} + 2^{1999} + \dots + 1000^{1999}$.
22. Da li se broj $1995^n + 5^m$, ($n, m \in \mathbb{N}$) može završavati sa 1995 nula?

TEMA 13.

KONGRUENCIJE PO MODULU (II deo)

→ **346/96 - 28.04.2000**

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

- Koliki je ostatak pri deljenju broja 2^{42} sa 13 ?
- Dokazati da je broj $3^{2001} - 1$ deljiv sa 13.
- Dokazati da je broj $10! + 1$ deljiv sa 11.
- Da li je broj $3032^{3035} + 7$ deljiv sa 15 ?
- Dokazati da je broj $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deljiv sa 7.
- Dokazati da je broj $3^{105} + 4^{105}$ deljiv sa 7 i 13, a nije deljiv sa 11.
- Ako je p neparan prost broj, onda je $2^p + 1$ deljiv sa 3. Dokazati.
- Odrediti sve proste brojeve p za koje je broj $2^p + p^2$ takođe prost.
- Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz $7^{2n} - 4^{2n}$ deljiv sa 33.
- Odrediti NZD svih brojeva oblika $7^{2n} - 1$.
- Ako su k, m, n prirodni brojevi, onda je $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ deljivo sa 11. Dokazati.
- Odrediti najmanji prirodan broj n za koji je $n^2 + 1$ deljivo sa 15.
- Ako je n prirodan broj, onda je $n^5 - n$ deljivo sa 5. Dokazati.
- Zbir cifara broja 9^{1999} je a . Zbir cifara broja a jednak je broju b , a zbir cifara broja b jednak je broju c . Odrediti broj c .
- Nijedan od brojeva a, b, c, d, e nije deljiv sa 5, a njihov zbir je deljiv sa 5. Dokazati da je tada $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$ deljivo sa 5.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

- Dato je 5 bilo kakvih prirodnih brojeva. Dokazati da se među njima mogu izabrati dva prirodna broja m i n , tako da je $m^4 - n^4$ deljivo sa 15.
- Ako je $n_1 + n_2 + \dots + n_{1997}$ deljivo sa 30, onda je i $n_1^5 + n_2^5 + \dots + n_{1997}^5$ deljivo sa 30 ($n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ su prirodni brojevi). Dokazati.
- Neka je $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \dots + p_{1996}^{1996}$, gde su $p_1, p_2, \dots, p_{1996}$ prvih 1996 prostih brojeva. Dokazati da je S deljivo sa 5.
- Dokazati da je suma $1^{1995} + 2^{1995} + \dots + 1994^{1995} + 1995^{1995}$ deljiva sa 1995.
- Dokazati da je broj $2^{1994} + 5^{1996}$ složen.